

第一章 向量代数

向量代数是几何代数化的最初步骤,也是连接几何和代数的最为本质的环节. 向量的各种代数运算(特别是分配率)蕴含着最基本的一些几何定理. 于是,许多深刻的几何定理可以通过一些简单的向量运算而得到.

§1 向量的线性运算

1.1 向量的加法

设 $\mathbb{E}^3$ 为空间中所有点构成的集合. 我们称空间中的有向线段为 **向量**(或 **矢量**).

如果 A 和 B 是空间中的两个点,我们记 $\overrightarrow{AB}$ 为以 A 为起点,以 B 为终点的有向线段构成的向量. 我们将线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度定义为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ (或 $d(A, B)$). 特别地,当 $A = B$ 时,我们称向量 $\overrightarrow{AB}$ 为零向量,它的长度为 0.

设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是空间中的两个向量. 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 可以通过平移与向量 $\overrightarrow{CD}$ 重合,我们就将它们视为相等的向量,记为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 换言之,如果两个向量有相同的长度和方向,则相等.

由空间几何的基本性质,我们知道,如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的,而向量 $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 是相等的,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 也必定相等(参见图 1-1). 我们将用同一个黑体字母 $\mathbf{a}$ 来表示所有这些相等的向量.

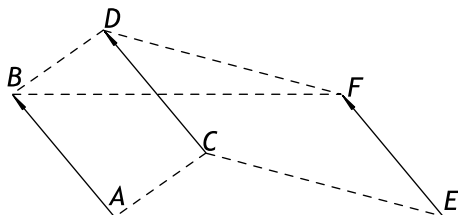


图 1-1

定义 1.1 我们称空间中的所有向量构成的集合 $\mathbb{V}$ 为 **向量空间**.

在本书中,我们将用黑体字母 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \cdots\}$ 来表示向量. 特别地,我们用 $\mathbf{0}$ 来表示零向量.

设 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ 为一个向量. 由定义知: 任给空间中的一点 A , 存在空间中的唯一点 B , 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义向量 $\mathbf{a}$ 的长度为 $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$. 由于相等的向量有相同的长度, 这个定义是合理的.

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, 我们定义 $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$. 向量 $-\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{a}$ 长度相同, 方向相反.

定义 1.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 为空间中的两个向量. 在空间中任取一点 O , 则存在唯一点 A 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. 同时, 存在唯一点 B 使得 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. 我们定义向量 $\overrightarrow{OB}$ 为两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之和, 记为 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

容易验证, 如果取不同的 O 点, 则得到的向量与原向量只差一个平移, 为相等的向量. 于是, 向量的加法与 O 点的选取无关 (参见图 1-2). 这说明了以上加法的定义是合理的.

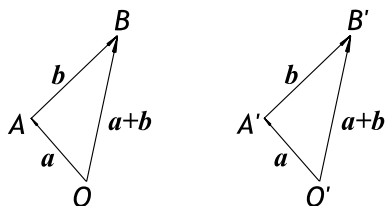


图 1-2

向量加法的上述定义称为向量加法的 ” 三角形法则 ”. 由定义可知, 对空间中的任意三点 A, B, C , 恒有等式

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

由图 1-3 容易看出, 以下向量加法的 ” 平行四边形法则 ” 同样适用: 取 O, A, B 三点使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, 以线段 OA 和 OB 为边作平行四边形 $AOBC$, 则有 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$.

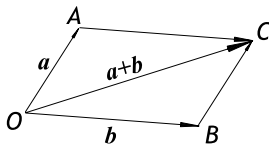


图 1-3

力学中的力是一个有大小、有方向的量，可以解释为向量。力的加法同样适用“平行四边形法则”。区别在于，力的作用点（图 1-3 中的 O 点）是力的一个要素，而在向量的加法中 O 点是可以随意选择的。

命题 1.1 向量的加法满足以下的性质：

- (1) 交换率： $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- (2) 结合率： $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
- (3) 对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, 有 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
- (4) 对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, 有 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

证明 向量加法的交换率可以由图 1-3 和向量加法的三角形法则直接得到。

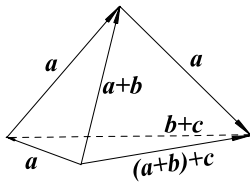


图 1-4

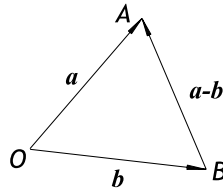


图 1-5

向量的结合率可有图 1-4 直接得到：

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \mathbf{0}$, 所以有

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a};$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}. \quad \square$$

定义 1.3 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$. 我们定义向量的减法为： $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

如图 1-5, 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, 则有

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

于是，空间中两个向量相加和相减得到的还是向量. 向量空间 $\mathbb{V}$ 对向量的加、减运算封闭.

1.2 向量的数量乘积

我们知道，一个向量由它的长度和方向所唯一决定.

定义 1.4 记 $\mathbb{R}$ 为全体实数构成的集合. 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 我们定义 $\lambda\mathbf{a}$ 是满足如下条件的唯一向量: (1) 它的长度为 $|\lambda||\mathbf{a}|$; (2) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反; 当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, 规定 $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$. 我们称向量 $\lambda\mathbf{a}$ 是实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的数量乘积.

从几何上看, 空间中两个非零的向量 (有向线段) $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行, 当且仅当存在一个非零的实数 λ , 使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ 成立.

由定义知, 实数和向量的数量乘积得到的还是一个向量. 故向量空间 $\mathbb{V}$ 对数量乘积运算也是封闭的.

命题 1.2 实数和向量的乘积满足以下的性质:

- (1) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$;
- (2) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;
- (3) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
- (4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

证明 性质 (1) 和 (2) 是定义 1.4 的直接推论, 等式两边的向量有相同的长度和方向.

我们先证性质 (3). 如果 λ, μ 和 $(\lambda + \mu)$ 三个数中至少有一个数为 0, 则性质 (3) 显然成立. 如果这三个数均非零, 则只有两种情形发生:

(i) λ 和 μ 同号; 这时两个向量 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 和 $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ 有相同的长度和方向, 性质 (3) 成立. (ii) λ 和 μ 异号; 我们可不妨设 λ 与 $\lambda + \mu$ 同号. 这时, $-\mu$ 和 $\lambda + \mu$ 同号, 由 (i) 知道

$$-\mu\mathbf{a} + (\lambda + \mu)\mathbf{a} = (-\mu + \lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}.$$

故 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, 性质 (3) 依然成立.

以下我们证明性质 (4). 如果 $\lambda, \mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 中有一个为零, 则性质 (4) 显然成立. 以下假设它们均非零. 如果两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行, 则存在非零实数 μ , 使得 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 这时应用性质 (2) 和 (3), 有

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda((1 + \mu)\mathbf{a}) = (\lambda(1 + \mu))\mathbf{a} = (\lambda + \lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b},$$

性质 (4) 成立. 如果两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行, 令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. 我们分别在直线 OA 和 OB 上找到唯一的点 C 和 D , 使得

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OB} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

图 1-6(a) 和图 1-6(b) 分别对应 $\lambda > 0$ 和 $\lambda < 0$ 的情形.

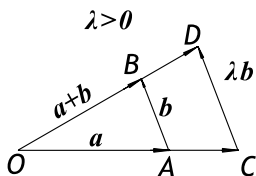


图 1-6(a)

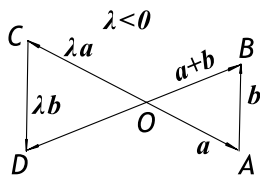


图 1-6(b)

由于 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 两组对应边成比例, 它们是相似三角形. 故 $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{b}$. 于是,

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$$

性质 (4) 得证. $\square$

由此可见, 数量乘积的分配率 (性质 (4)) 对应平面几何中的相似三角形边长成比例的定理.

1.3 向量的分解

定义 1.5 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 为一组向量. 如果在取定共同起点 O 后, 构成这些向量的有向线段均落在同一条直线上, 我们就称它们为 **共线** (或 **平行**) 的向量.

定义 1.6 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ 为一组向量. 如果在取定共同起点 O 后, 构成这些向量的有向线段均落在同一张平面上, 我们就称它们为 **共面** 的向量.

容易验证, 向量的共线或共面关系与共同起点 O 的选取无关. 共线的向量一定共面.

设 $\mathbf{a}$ 是一个非零向量. 令 $\mathbb{L}(\mathbf{a})$ 是所有与 $\mathbf{a}$ 共线的向量构成的集合. 当我们取定一点 O 作为共同起点时, 这些共线向量的终点构成一条直线 ℓ . 于是, 有

$$\mathbb{L}(\mathbf{a}) = \{\lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

显然, 对任何 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\mathbf{b} + \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda \mathbf{b} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$. 我们称 $\mathbb{L}(\mathbf{a})$ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 生成的向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个 (1 维的) 子空间.

当两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 我们记 $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \lambda$, 它是一个实数. 由命题 1.2 容易得到, 对任何 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, \quad \frac{\lambda \mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \lambda \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}.$$

命题 1.3 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ 和 μ , 使得

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

证明 设两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线. 如果 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则有 $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} = \mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中至少有一个向量非零, 可不妨设 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 共线, 则存在实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. 这时, $\lambda \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 成立. 必要性得证. 反之, 如果存在不全为零的实数 λ 和 μ , 使得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 成立. 我们不妨设 $\mu \neq 0$. 则有 $\mathbf{b} = -\frac{\lambda}{\mu} \mathbf{a}$, 故 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$ 共线. 充分性得证. $\square$

推论 1.1 如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 且 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则必有 $\lambda = \mu = 0$.

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是两个不共线的向量. 令 $\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是所有与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共面的向量构成的集合. 我们取定一个共同的起点 O , 则这些共面向量的终点构成一张平面 σ . 令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. 任给 $\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 存在 $C \in \sigma$ 使得 $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. 由于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不共线, 两直线 OA 和 OB 只交于一点 O . 过点 C 分别作 OA 和 OB 的平行线, 交 OA 于 D , 交 OB 于 E (参见图 1-7).

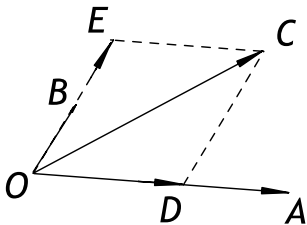


图 1-7

由于 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 共线, $\overrightarrow{OE}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线, 故存在实数对 (λ, μ) , 使得 $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OE} = \mu \overrightarrow{OB} = \mu \mathbf{b}$. 由向量加法的“平行四边形法

则”，我们得到

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

反之，对任何实数对 (λ, μ) ，我们令 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$. 由向量加法的“平行四边形法则”推出， C 点必落在两直线 OA 和 OB 所确定的平面上. 故 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 于是，我们有

$$\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

容易验证，对任何 $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ ，有 $\mathbf{c} + \mathbf{d} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 和 $\lambda \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 我们称 $\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为不共线向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 生成的向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个 (2 维的) 子空间.

命题 1.4 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，则存在唯一的实数对 (λ, μ) ，使得 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$.

证明 我们只需证明唯一性. 如果存在两个实数对 (λ, μ) 和 (λ', μ') ，使得

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b},$$

则有 $(\lambda - \lambda')\mathbf{a} + (\mu - \mu')\mathbf{b} = \mathbf{0}$. 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，由推论 1.1 得到 $\lambda - \lambda' = 0$ 和 $\mu - \mu' = 0$. 于是，这样的实数对 (λ, μ) 存在且唯一. $\square$

命题 1.5 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν ，使得

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

证明 先证必要性. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面. 如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线，则由命题 1.3 知，存在不全为零的实数 λ 和 μ ，使得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$. 这时，我们有 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ，必要性成立. 如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，由命题 1.4 知，存在实数 λ 和 μ ，使得 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$. 故 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ，必要性也成立. 现证充分性. 设存在不全为零的实数 λ, μ, ν ，使得 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} = \mathbf{0}$. 我们可不妨设 $\nu \neq 0$. 这时，有

$$\mathbf{c} = -\frac{\lambda}{\nu} \mathbf{a} - \frac{\mu}{\nu} \mathbf{b}.$$

如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共线，可不妨设 $\mathbf{a} = \rho \mathbf{b}$ ，则有 $\mathbf{c} = -(\frac{\lambda}{\nu} \rho + \frac{\mu}{\nu})\mathbf{b}$. 这时 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共线，必共面. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不共线，则 $\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ，这时 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 也共面. 充分性得证. $\square$

推论 1.2 如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 且 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则必有 $\lambda = \mu = \nu = 0$.

定义 1.7 设 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ 为一组向量. 如果向量 $\mathbf{b}$ 可以表成

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_r\mathbf{a}_r,$$

其中 $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ 为实数, 我们就称向量 $\mathbf{b}$ 可以分解成向量组 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ 的一个线性组合.

命题 1.6 如果 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为不共面的向量, 则空间中的任何一个向量均可唯一地分解成 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 的一个线性组合.

证明 在空间中取定一点 O 作为向量的共同起点. 我们记由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所张成的平面为 Σ . 现设 $\mathbf{d} = \overrightarrow{OA}$ 为空间中的任意向量. 过 A 作 $\mathbf{c}$ 的平行线, 交平面 Σ 于 B (参见图 1-8).

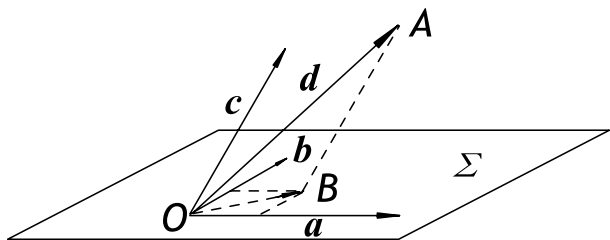


图 1-8

则向量 $\overrightarrow{OB}$ 落在平面 σ 上, 并且向量 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\mathbf{d}$ 平行. 于是, 由命题 1.4 知, 存在实数 λ, μ 和 ν , 使得

$$\overrightarrow{OB} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{BA} = \nu\mathbf{c}.$$

由此可得

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}.$$

假如 $\mathbf{d}$ 又可分解成 $\mathbf{d} = \lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}$, 则有

$$(\lambda - \lambda')\mathbf{a} + (\mu - \mu')\mathbf{b} + (\nu - \nu')\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

因为 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 不共面, 则由推论 1.2 推出 $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$ 和 $\nu = \nu'$. $\square$

定义 1.8 我们称空间中一组不共面的向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 取定向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 则任何向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ 可以唯一表成

$$\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

的形式. 我们称三元数组 (a_1, a_2, a_3) 为向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标.

我们记 $\mathbb{R}^3$ 为所有实数三元数组构成的集合. 在 $\mathbb{R}^3$ 中我们定义以下的加法和数乘运算:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

容易验证, 以下的命题成立.

命题 1.7 设向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) , λ 和 μ 为实数, 则向量 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 的坐标为

$$(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3).$$

在取定 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 后, 便可定义 1-1 对应 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 如下: 对任何向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, 令 $\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, 定义

$$\phi(\mathbf{a}) = (a_1, a_2, a_3).$$

由命题 1.7 知, 这样定义的 1-1 对应 ϕ 拥有以下性质:

$$\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b}),$$

称为向量空间 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性同构. 我们注意到, 这样的同构与基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取有关.

1.4 向量线性运算的应用

设 A 和 B 是空间中两个不同点. 则 A, B, C 三点共线的充要条件是存在实数 $t \in \mathbb{R}$ 使得

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}.$$

每个实数 t 将唯一对应直线 AB 上的点 C (参见图 1-9).

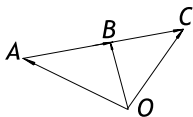


图 1-9

在空间中取定一点 O . 因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, 则方程 $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ 等价于以下的向量方程:

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

我们注意到, 这个方程与 O 点的选取无关. 于是, 我们得到

命题 1.8 空间中三点 A, B, C 共线当且仅当存在实数 t 使得

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

定义 1.9 设 A, B, C 是共线的三个不同点. 我们定义 C 点关于 A, B 的分比为

$$(A, B; C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

从图 1-9 容易看出, 分比 $(A, B; C)$ 的取值范围为

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

当 A 和 B 固定时, C 点由它的分比所唯一决定. 当 C 落在线段 $\overline{AB}$ 之外时, 分比 $(A, B; C) < 0$; 当 C 落在线段 $\overline{AB}$ 之内时, 分比 $(A, B; C) > 0$. 特别地, C 为线段 $\overline{AB}$ 的中点当且仅当 $(A, B; C) = 1$.

当分比 $(A, B; C) = \lambda$ 时, 从方程 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ 我们容易得到

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}. \quad (1.4.1)$$

下面我们给出向量线性运算的一些几何应用.

例 1.1 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是空间中的 n 个点. 我们在空间中任意取定一点 O , 则

$$\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$$

是空间中的一个向量. 于是, 存在空间中唯一点 M , 它满足

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}). \quad (1.4.2)$$

容易验证, 如果我们将上式中的点 O 换成另一点 O' , 则 (1.4.2) 依然成立. 这样, M 点与 O 点的选取无关, 它由点 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 所

唯一决定. 我们称 M 为点组 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 的 **重心**. 在 (1.4.1) 中令 $O = M$, 我们得到

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = 0. \quad (1.4.3)$$

换言之, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 的重心是空间中满足向量方程 (1.4.3) 的唯一一点 M .

空间中两点 A 和 B 的重心 M 恰是线段 AB 的中点.

三角形 ABC 的重心 M 定义为三顶点 $\{A, B, C\}$ 的重心, 它的位置由方程

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

给出. 由于 BC 边上的中点 D 满足 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 我们有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}.$$

这说明, M 落在三角形 ABC 的中线 AD 上. 在上式中取 $O = M$, 我们立即知道 M 点将 AD 分割成长度比为 $2:1$ 的两段. 同样道理, M 也落在三角形的另外两条中线上, 并将中线分割成长度比为 $2:1$ 的两段. 于是, 三角形的重心恰为三中线的交点.

例 1.2 设 D, E 和 F 分别是三角形 ABC 的边 AB, BC 和 CA 上的点 (参见图 1-10).

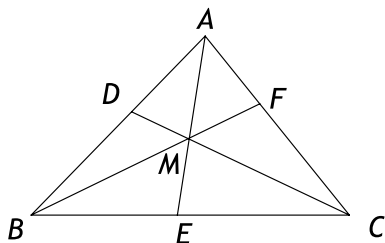


图 1-10

我们用向量方法证明以下的

Ceva 定理 三直线 AE, BF 和 CD 交于一点的充要条件是

$$(A, B; D)(B, C; E)(C, A; F) = 1.$$

证明 先证必要性. 设三条直线 AE , BF 和 CD 交于一点 M . 我们记

$$(A, B; D) = \lambda, (B, C; E) = \mu, (C, A; F) = \nu.$$

由于 A, B 和 D 三点共线, 且 $(A, B; D) = \lambda$, 我们参照 (1.4.1) 并取 $O = M$, 得到

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{MA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{MB}. \quad (1.4.4)$$

因为 M, D, C 三点共线, 我们可以找到实数 x 使得 $\overrightarrow{MD} = -\frac{x}{1+\lambda}\overrightarrow{MC}$.

代入方程 (1.4.4), 我们得到向量方程

$$\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC} = 0. \quad (1.4.5)$$

同样道理, 利用 $(B, C; E) = \mu$ 和 $(C, A; F) = \nu$, 我们可以找到实数 y 和 z , 使得

$$y\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{MC} = 0; \quad (1.4.6)$$

$$\nu\overrightarrow{MA} + z\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0. \quad (1.4.7)$$

从 (1.4.5) 和 (1.4.6) 中消去 $\overrightarrow{MB}$, 从 (1.4.5) 和 (1.4.7) 中消去 $\overrightarrow{MA}$, 我们得到

$$(1 - \lambda y)\overrightarrow{MB} + (x - \lambda\mu)\overrightarrow{MC} = 0, (\lambda\nu - z)\overrightarrow{MB} + (x\nu - 1)\overrightarrow{MC} = 0.$$

因为 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MC}$ 中任何两个互不共线, 故有

$$1 - \lambda y = x - \lambda\mu = \lambda\nu - z = x\nu - 1 = 0.$$

由此推出

$$x = \frac{1}{\nu}, y = \frac{1}{\lambda}, z = \frac{1}{\mu}, \lambda\mu\nu = 1.$$

于是, 必要性得证.

在证明充分性之前, 我们先求得交点 M 的位置. 因为 $\lambda\mu\nu = 1$, 我们可以找到非零实数 a, b, c , 使得 $\lambda = b/a$, $\mu = c/b$ 和 $\nu = a/c$. 取定空间中的一点 O . 由于

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM},$$

将这些数值和向量代入方程 (1.4.5), 我们得到

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}. \quad (1.4.8)$$

下面我们证明充分性. 设 D, E 和 F 分别是三角形 ABC 的边 AB, BC 和 CA 上的点, 使得 $(A, B; D)(B, C; E)(C, A; F) = 1$. 我们取非零实数 a, b 和 c , 使得

$$(A, B; D) = \frac{b}{a}, \quad (B, C; E) = \frac{c}{b}, \quad (C, A; F) = \frac{a}{c}.$$

由公式 (1.4.1), 我们有

$$\overrightarrow{OD} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}.$$

令 M 是空间中满足向量方程 (1.4.8) 的唯一一点, 则有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a+b}{a+b+c}\overrightarrow{OD} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}.$$

于是, M 点落在直线 DC 上. 同样道理, M 也落在直线 AE 和 BF 上. 这样, 三直线 AE, BF 和 CD 交于一点 M . 充分性得证. $\square$

习题 1-1

1. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两不共线, 且满足

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \nu_1 \mathbf{c} = 0, \quad \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \nu_2 \mathbf{c} = 0,$$

其中 $\{\lambda_1, \mu_1, \nu_1\}$ 和 $\{\lambda_2, \mu_2, \nu_2\}$ 为两组不全为零的实数. 证明:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

2. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 为任意向量. 证明: 存在不全为零的实数 $\lambda, \mu, \nu, \omega$ 使得

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} + \omega \mathbf{d} = 0.$$

3. 设 O 为空间中的一点. 证明: A, B, C 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ 和 ν , 使得

$$\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC} = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0.$$

4. 设 A, B, C 为平面 σ 上不共线的三点. O 是空间中一点. 则空间中一点 D 落在平面 σ 上的充要条件是存在实数 λ, μ 和 ν , 使得

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}, \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

5. 设 O 为空间中的一点. 证明: A, B, C, D 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν 和 ω , 使得

$$\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC} + \omega \overrightarrow{OD} = 0, \quad \lambda + \mu + \nu + \omega = 0.$$

6. 设 $\mathbb{P}$ 是以 O 点处的三个不共面的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为边的平行六面体. 设 M 为 $\mathbb{P}$ 的重心. 求向量 $\overrightarrow{OM}$.

7. 设 A, B, C, D 为空间中四点. 设 M_1, M_2, M_3 和 M_4 分别是线段 AB, BC, CD 和 DA 的中点, 它们各不相同. 证明: $M_1 M_2 M_3 M_4$ 构成一个平行四边形, 并且它的重心与四边形 $ABCD$ 的重心相同.

8. 证明: 平面上一个正 n 边形的重心恰为其外接圆的圆心.

9. 已经在图 1-10 中三直线 AE, BF 和 CD 交于一点 M . 已知 $(A, B; D) = \lambda, (B, C; E) = \mu, (C, A; F) = \nu$ 和 $\overrightarrow{OM} = k_1 \overrightarrow{OA} + k_2 \overrightarrow{OB} + k_3 \overrightarrow{OC}$. 求: k_1, k_2, k_3 .

10. 将空间中的一组点 S 随意分成两组点 S_1 和 S_2 . 设 S, S_1 和 S_2 的重心分别是 M, M_1 和 M_2 . 证明: M 落在线段 $M_1 M_2$ 上, 并且 $(M_1, M_2; M) = |S_2| : |S_1|$, 其中 $|S_1|$ 和 $|S_2|$ 分别是 S_1 和 S_2 中点的个数.

11. 设三角形 ABC 顶点 A, B, C 的对应边边长分别为 a, b, c . 证明: 三角形三个角平分线交于一点 M , 并且 M 的位置由以下向量方程给出:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$

12. 如图 1-11 所示, D, E, F 分别是三角形 ABC 的三个边 AB, BC 和 CA 上的点. 试用向量的方法证明 Menelaus 定理: $(A, B; D)(B, C; E)(C, A; F) = -1$.

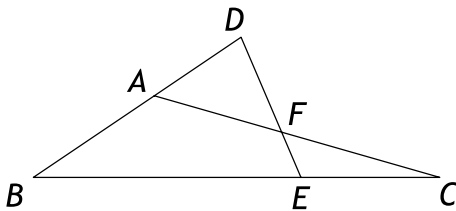


图 1-11

§2 向量的内积、外积和体积

2.1 向量的内积

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为空间中的两个非零向量. 记 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的夹角.

定义 2.1 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 非零, 我们定义它们的 **内积** 为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中有一个为零, 它们之间的夹角不能确定, 这时我们规定内积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

当两向量满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 时, 我们称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直, 记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

设 e 是一个单位向量. 由图 2-1 可见, 任何向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ 均可以唯一分解成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_e^\perp, \quad (2.1.1)$$

其中 $\mathbf{a}_e \parallel e$, $\mathbf{a}_e^\perp \perp e$. 我们称 (2.1.1) 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的正交分解, 称 $\mathbf{a}_e$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的水平投影, 称 $\mathbf{a}_e^\perp$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影.

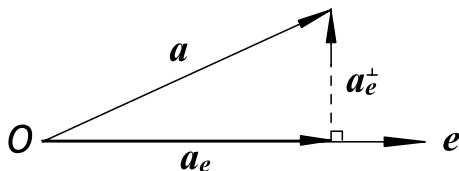


图 2-1

如果 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e^\perp$ 是向量 $\mathbf{b}$ 关于 e 的正交分解, 则有

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a}_e + \mathbf{b}_e) + (\mathbf{a}_e^\perp + \mathbf{b}_e^\perp).$$

由于 $(\mathbf{a}_e + \mathbf{b}_e) \parallel e$, $(\mathbf{a}_e^\perp + \mathbf{b}_e^\perp) \perp e$, 故有

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_e = \mathbf{a}_e + \mathbf{b}_e, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})_e^\perp = \mathbf{a}_e^\perp + \mathbf{b}_e^\perp. \quad (2.1.2)$$

于是, 两向量之和的水平投影等于两向量水平投影之和; 两向量之和的垂直投影等于两向量垂直投影之和. 此外, 从图 1-12 我们得到

$$\mathbf{a}_e = (|\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, e \rangle) e = (\mathbf{a} \cdot e) e. \quad (2.1.3)$$

命题 2.1 向量的内积满足以下性质:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;
- (3) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
- (4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

证明 性质 (1) 和 (2) 由内积的定义不证自明.

我们先证性质 (3). 不妨设 $\lambda, \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均非零. 当 $\lambda > 0$ 时, 有

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle \mathbf{a}, \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b});$$

当 $\lambda < 0$ 时, 有

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} = (-\lambda) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi - \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

故性质 (3) 成立.

下面我们证明内积的分配率 (4) 成立. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为任意向量. 我们取实数 λ 和单位向量 $\mathbf{e}$, 使得 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{e}$. 对公式 (2.1.3) 应用性质 (3), 我们得到公式

$$\mathbf{a}_e \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}.$$

利用这个公式, 以及 (2.1.2) 和 (2.1.3), 我们得到

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})_e \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{a}_e + \mathbf{b}_e) \cdot \mathbf{e} = [((\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}))\mathbf{e}] \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}.$$

两边同乘以 λ , 便得到性质 (4). $\square$

下面我们给出向量内积的一些应用.

例 2.1 设三角形 ABC 三个角 A, B, C 所对应的边长分别为 a, b, c . 令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}, \mathbf{b} = \overrightarrow{CA}, \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$. 因为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 并且

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} = ab \cos C,$$

我们利用内积的分配率得到

$$c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

这正是三角形的余弦定理. $\square$

例 2.2 设三角形 ABC 的两条高 BD 和 CE 交于一点 O . 我们记

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

则有

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

于是, 我们得到

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0.$$

这样我们证明了: 任意三角形三高交于一点. $\square$

定义 2.2 我们称两两垂直的单位向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间的一个单位正交基.

命题 2.2 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 空间中的一个单位正交基, 则对任何一个向量 $\mathbf{c}$ 有

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot e_1)e_1 + (\mathbf{c} \cdot e_2)e_2 + (\mathbf{c} \cdot e_3)e_3. \quad (2.1.4)$$

证明 因为 e_1, e_2, e_3 不共面, 则任何向量 $\mathbf{c}$ 均可分解成

$$\mathbf{c} = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3.$$

方程两边分别与 e_1, e_2 和 e_3 做内积, 并利用内积的分配率, 我们得到 $\lambda = \mathbf{c} \cdot e_1, \mu = \mathbf{c} \cdot e_2$ 和 $\nu = \mathbf{c} \cdot e_3$. $\square$

命题 2.3 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间中的一个单位正交基. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) . 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2.1.5)$$

证明 因为

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0, \quad (2.1.6)$$

我们利用分配率得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

$\square$

2.2 向量的外积

设 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 我们取定一个共同的起点 O . 则由图 2-2 可见, 以下两种情形必有而且仅有一种情形发生:

- (1) 当我们将右手拇指指向 $\mathbf{a}$ 的方向, 食指指向 $\mathbf{b}$ 的方向时, 可以自然地中指指向 $\mathbf{c}$ 的方向;
- (2) 当我们将左手拇指指向 $\mathbf{a}$ 的方向, 食指指向 $\mathbf{b}$ 的方向时, 可以自然地中指指向 $\mathbf{c}$ 的方向.



图 2-2

如果情形 (1) 发生, 我们就称 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为右手系的基 (标架); 如果情形 (2) 发生, 我们就称 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为左手系的 (标架).

我们注意到, 一组基是右手系还是左手系, 是与基向量的排列顺序密切相关的. 容易验证, 如果 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是右手系, 则 $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ 和 $\{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ 还是右手系, 而 $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$, $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\}$ 和 $\{\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\}$ 则是左手系.

定义 2.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为空间中的两个向量. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行, 我们规定 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为零向量. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行, 我们定义向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为满足以下条件的唯一向量:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均垂直;
- (2) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ 构成一个右手系的标架;
- (3) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

我们称向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的外积.

设 $\mathbf{e}$ 为单位向量. 我们在空间中取定一点 O , 则存在唯一一张过 O 点并与 $\mathbf{e}$ 垂直的平面 Σ . 对任何一个与 $\mathbf{e}$ 垂直的向量 $\mathbf{a}$, 存在 Σ 上的唯一点 A , 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. 我们以 O 点为中心将向量 $\overrightarrow{OA}$ 右旋 90° , 得到一个向量 $\rho_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ (参见图 2-3).

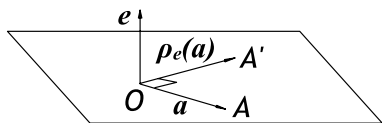


图 2-3

显然, 向量 $\rho_e(\mathbf{a})$ 与 O 点的选取无关. 设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是落在 e 垂直平面 Σ 上的两个向量. 根据平行四边形法则, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 也落在平面 Σ 上. 因为 ρ_e 将整个平行四边形右旋 90° , 从图 2-3 可见,

$$\rho_e(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \rho_e(\mathbf{a}) + \rho_e(\mathbf{b}). \quad (2.2.1)$$

命题 2.3 设 e 为单位向量, $\mathbf{a}$ 为任意向量, $\mathbf{a}_e^\perp$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影. 则有

$$e \times \mathbf{a} = \rho_e(\mathbf{a}_e^\perp), \quad (2.2.2)$$

其中 $\mathbf{a}_e^\perp$ 是向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影.

证明 如果 $\mathbf{a}$ 与 e 平行, 则 $e \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \rho_e(\mathbf{a}_e^\perp)$, 命题成立. 如果 $\mathbf{a}$ 与 e 不平行, 则 $e \times \mathbf{a}$ 和 $\rho_e(\mathbf{a}_e^\perp)$ 均垂直于 e 和 $\mathbf{a}$. 由于

$$|e \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \sin \langle \mathbf{a}, e \rangle = |\mathbf{a}_e^\perp| = |\rho_e(\mathbf{a}_e^\perp)|,$$

并且 $\{e, \mathbf{a}, \rho_e(\mathbf{a}_e^\perp)\}$ 也是右手系向量组, 故 $e \times \mathbf{a} = \rho_e(\mathbf{a}_e^\perp)$. $\square$

命题 2.4 向量的外积满足以下的性质:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
- (2) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;
- (3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

证明 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行, 则性质 (1) 和 (2) 显然成立. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行, 容易验证 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ 和 $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 有相同的长度和方向. 故性质 (1) 和 (2) 也成立.

我们来证明性质 (3). 取单位向量 e 和实数 λ 使得 $\mathbf{c} = \lambda e$. 利用 (2.2.2), (2.1.2), (2.2.1) 和性质 (2) 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda e \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \rho_e((\mathbf{a} + \mathbf{b})_e^\perp) = \lambda \rho_e(\mathbf{a}_e^\perp + \mathbf{b}_e^\perp) \\ &= \lambda(\rho_e(\mathbf{a}_e^\perp) + \rho_e(\mathbf{b}_e^\perp)) = \lambda(e \times \mathbf{a} + e \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

再利用 (1), 我们得到性质 (3). $\square$

命题 2.5 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为向量空间中的一个右手系的单位正交基. 设向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) . 则向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 在这组基下的坐标为

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

证明 因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为右手系的单位正交基, 则有

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2. \quad (2.2.3)$$

利用命题 2.4 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

□

命题 2.6 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为空间中的三个向量. 则有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

证明 取实数 λ 和单位向量 e_1 , 使得 $\mathbf{c} = \lambda e_1$. 任取一个与 e_1 垂直的单位向量 e_2 , 并令 $e_3 = e_1 \times e_2$. 则 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 构成空间中的一个右手系的单位正交基. 令 $\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $\mathbf{b} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$. 利用 (2.2.4) 我们得到

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times e_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_2 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3.$$

通过直接计算, 我们得到

$$(\mathbf{a} \cdot e_1) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot e_1) \mathbf{a} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_2 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times e_1.$$

在等式两边乘以 λ , 我们便完成了命题的证明. □

2.3 向量的体积

定义 2.3 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个向量. 我们称

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

为它们的体积.

命题 2.7 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中一个右手系的单位正交标架. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 在这组标架下的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) 和 (c_1, c_2, c_3) . 则有

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \quad (2.3.1)$$

证明 由命题 2.5，我们有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3.$$

由于 $\mathbf{c} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ ，利用 (2.1.5) 直接计算，我们得到公式 (2.3.1). $\square$

为了简便起见，我们定义行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \quad (2.3.2)$$

容易验证，行列式满足以下性质：

(1) 如果我们将行列式中的两个列对换，则行列式仅差一个负号：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.3)$$

(2) 如果我们将行列式中的列进行轮换，则行列式不变：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.4)$$

(3) 行列式对每个固定的列是线性的。以第一列为例，我们有：

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 & c_1 & d_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 & c_2 & d_2 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.5)$$

(4) 将行列式的列变成行，则行列式不变：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.6)$$

利用性质 (4)，我们知道，行列式的性质 (1), (2) 和 (3) 对行作变换时也一样成立。

由 (2.3.1) 和行列式的定义，我们得到

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.7)$$

利用 (2.3.7) 和行列式的以上性质, 我们直接得到以下命题.

命题 2.8 向量的体积满足以下性质:

- (1) 反称性: $[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}];$
- (2) 轮换对称性: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}];$
- (3) 对每个变量的线性性, 例如: $[\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \mu[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}].$

推论 2.1 三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$.

证明 先证必要性. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 则其中的一个向量可以表成另外两个向量的线性组合. 不妨设 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. 因为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均垂直, 所以

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = 0.$$

故必要性成立. 此外, 对三个不共面的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 来说, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ 构成向量空间的一组基. 故向量 $\mathbf{c}$ 一定可以表成 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的形式, 其中 $\nu \neq 0$. 这时必有

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \nu|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \neq 0.$$

于是, 如果 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 必共面. 故充分性也成立. $\square$

下面我们考察向量体积的几何意义. 设 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为三个不共面的向量. 则它可以构成空间中的一个平行六面体 (参见图 2-4).

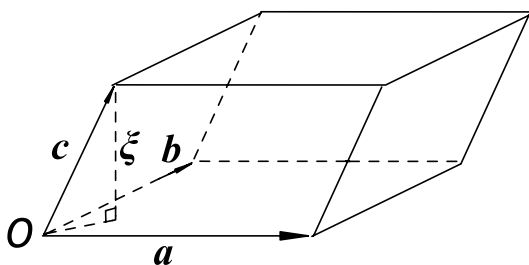


图 2-4

由向量外积的定义, 有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b} \boldsymbol{\xi},$$

其中 ξ 是与向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直的单位向量, 并且 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \xi)$ 构成一个右手系. 于是,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) (\xi \cdot \mathbf{c}).$$

由于 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 生成的平行四边形面积, 而 $h = |\xi \cdot \mathbf{c}|$ 是平行六面体的高. 故: 当 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为右手系标架时, $\xi \cdot \mathbf{c} > 0$, 这时 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ 恰为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 所构成的平行六面体的体积 V (底面积乘高); 当 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为左手系标架时, $\xi \cdot \mathbf{c} < 0$, 这时 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -V$.

我们注意到, 正是由于命题 2.8 中的性质 (2) 成立, 我们知道一个平行六面体的三个“底面积乘高”的数值相等.

命题 2.9 对任意的四个向量有以下的 *Lagrange* 公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

证明: 由体积的轮换对称性及命题 2.6, 有

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \\ &= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \end{aligned}$$

□

2.4 向量代数在球面几何中的应用

空间中的球面是一个对称且优美的几何对象. 设 $\mathbb{S}^2$ 是空间中的一个单位球面, 它的中心在 O 点. 球面 $\mathbb{S}^2$ 上的每一点, 均对应它关于中心 O 的对称点 P' . P' 称为 P 的对径点.

设 P, Q 是 $\mathbb{S}^2$ 上两个非对径点, 则 P 和 Q 唯一决定一个大圆弧 ℓ , 使得 P 和 Q 落在 ℓ 上. 这个大圆弧是 O, P, Q 三点所确定的平面与 $\mathbb{S}^2$ 的交. 如果我们将大圆弧看成是球面上的“直线”, 则球面上的两个非对径点唯一确定球面上的一条“直线”.

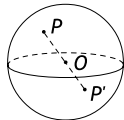


图 2-5(a)

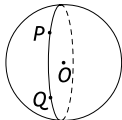


图 2-5(b)

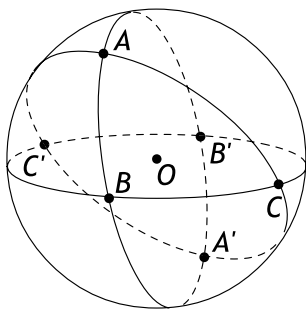


图 2-6

球面上任何两条大圆弧一定相交于两个对径点. 由三个部分大圆弧构成的三角形称为球面三角形. 设 $\triangle ABC$ 是一个球面三角形. 则这三个大圆弧的另外三个交点为 A' , B' 和 C' , 它们构成与 $\triangle ABC$ 全等的球面三角形 $\triangle A'B'C'$ (参见图 2-6).

我们记部分大圆弧 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{CA}$ 的长度分别为 a , b 和 c . 我们用同一个记号 A 表示大圆弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{AC}$ 所在平面之间的夹角的大小, B 为大圆弧 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{BA}$ 所在平面之间的夹角的大小, 记 C 为大圆弧 $\widehat{CA}$ 和 $\widehat{CB}$ 所在平面之间的夹角的大小.

定理 2.1 球面 $\triangle ABC$ 的面积 $\Delta = A + B + C - \pi$.

证明 过 A 点的两个大圆弧交于两个对径点 A 和 A' . 因为整个单位球面的面积为 4π , 所以这两个交角为 A 的大圆弧切下的两个“西瓜瓢”部分的面积为 $(A/\pi) \cdot 4\pi = 4A$. 我们注意到, A 角的两个“西瓜瓢”, B 角的两个“西瓜瓢”和 C 角的两个“西瓜瓢”和在一起, 恰好覆盖球面三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 各三次, 而覆盖球面上其余的部分一次. 于是, 有

$$4A + 4B + 4C = 2\Delta + 2\Delta' + 4\pi.$$

由于 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的面积相等, 故 $\Delta = A + B + C - \pi$. $\square$

推论 2.2 球面三角形的内角和大于 π .

定理 2.2 设 $\triangle ABC$ 为球面三角形, 角 A , B 和 C 所对应的三边长分别为 a , b 和 c . 则有以下

(1) 正弦定理:
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

(2) 余弦定理:
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

证明 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. 则 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为单位向量.

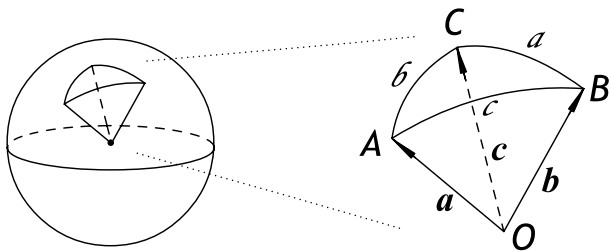


图 2-7

从图 2-7 我们得到以下的夹角公式

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = c, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = a, \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = b; \quad (2.4.1)$$

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c} \rangle = A, \quad \langle \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = B, \quad \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{b} \rangle = C. \quad (2.4.2)$$

我们先证正弦定理. 由命题 2.6, 我们得到

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \mathbf{a};$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] \mathbf{b};$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \mathbf{c}.$$

由此推出

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})|. \quad (2.4.3)$$

由 (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) 和向量外积的定义, 我们得到

$$\sin c \sin b \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin b \sin a \sin C.$$

正弦定理得证.

以下我们证明余弦定理. 由 *Lagrange* 公式, 我们有

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}). \quad (2.4.4)$$

由夹角公式 (2.4.1), (2.4.2), (2.4.4) 和内积的定义, 我们得到

$$\sin a \sin b \cos A = \cos c - \cos a \cos b.$$

于是, 余弦定理得证. $\square$

利用球面三角形的面积公式, 可以证明以下的

定理 2.3 (欧拉公式) 设凸多面体 $\mathbb{P}$ 顶点个数为 v , 棱的个数为 e , 面的个数为 f , 则有 $v - e + f = 2$.

证明 多面体的每个面是多边形. 一条对角线可将多边形分割成两个多边形, 这时棱和面各增加一个, 而顶点个数不变, 所以 $v - e + f$ 不变. 利用对角线我们将多面体的每个面分割成三角形, 而 $v - e + f$ 没有改变. 于是, 我们可以不妨假定多面体 $\mathbb{P}$ 的所有面由三角形构成. 在 $\mathbb{P}$ 的内部取一点 O , 令 S^2 为以 O 为中心的球面. 利用以 O 为中心的射线将多面体 $\mathbb{P}$ 的表面投影到球面 S^2 上, 多面体每个三角形的面成为 S^2 上的球面三角形. 于是, 整个球面 S^2 被这些球面三角形构成的球面三角地图所覆盖. 这个地图共有 v 个顶点, e 条棱和 f 个面. 设 $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_f\}$ 为所有的面, 每个面 Δ_i 的三个内角为 α_i , β_i 和 γ_i . 由面积公式, 有 $\Delta_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi$. 于是, 有

$$4\pi = \sum_{i=1}^f \Delta_i = \sum_{i=1}^f (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - f\pi.$$

由于所有这些球面三角形的内角加在一起等于 $2\pi v$, 所以 $4\pi = 2\pi v - f\pi$, 即 $2v - f = 4$. 因为每个面有三条棱, 于是 f 个面应有 $3f$ 条棱. 但每条棱恰属于两个面, 这样 $3f$ 恰好将每条棱数了两次, 故 $3f = 2e$. 由此得到 $v - e + f = v - f/2 = 2$. $\square$

习题 1-2

1. 试用向量法证明: 平行四边形四边的平方和等于对角线的平方和.
2. 试用向量法证明: 三角形三中线长度的平方和等于三边长度平方和的 $3/4$.
3. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明: 如果向量 $\mathbf{d}$ 满足 $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = 0$, 则 $\mathbf{d}$ 必为零向量.
4. 设四面体 $ABCD$ 的两对对棱互相垂直. 试用向量法证明: 四面体的另一对对棱也垂直, 并且三对对棱长度的平方和相等.
5. 设 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 为一个正 n 边形.

(i) 证明向量方程

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_n A_1} = 0.$$

(ii) 利用 (i) 来证明以下恒等式

$$1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{(2n-2)\pi}{n} = 0;$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(2n-2)\pi}{n} = 0.$$

6. 证明: 对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 以下的 Jacobi 恒等式成立:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0.$$

7. 证明: $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$, 且等式成立当且仅当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 互相垂直, 或者其中有一个为零向量.

8. 证明:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a}.$$

9. 证明: 对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, 有

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a} + [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}]\mathbf{b} + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} + [\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]\mathbf{d} = 0.$$

10. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明: 任何向量 $\mathbf{d}$ 可分解成为

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{b} + \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}\mathbf{c}.$$

11. 设 a, b, c 和 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为任意的两组向量. 证明:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}][\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}][\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}].$$

12. 证明: 如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 也共面.

13. 证明: 如果 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 是一个标架, 则 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a})$ 是一个右手系标架.

14. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明: 关于向量 x 的方程组

$$x \cdot \mathbf{a} = \lambda, \quad x \cdot \mathbf{b} = \mu, \quad x \cdot \mathbf{c} = \nu,$$

有唯一解, 为

$$x = \frac{\lambda \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mu \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \nu \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}.$$

15. 试用立体几何的方法证明: 四面体的四个“底面积乘高”相等.

16. 证明: 将球面上半圆弧绕其直径旋转 α 角, 得到的西瓜瓢面积为 4α . (提示: 先考虑 $\mathbf{a} = 2\pi q$ 的情形, 其中 q 为有理数)

第二章 等距变换和仿射变换

仿射变换是空间中的保线变换,它含有空间等距变换作为特例.从代数上看,仿射变换可以看成是一个线性变换和一个平移变换的复合.从仿射变换的保线性诱导向量空间的一个线性变换,进而推导出仿射变换的代数表示,是几何代数化又一个完美的例子,其中的桥梁正是向量代数.而各具特性的变换群,形成了几何的丰富内涵.

§1 等距变换

1.1 平面等距变换

设 Σ 为一张平面.我们称 Σ 到自身的一一对应为平面的一个 **变换**.换言之,平面的一个变换是满足以下条件的映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$: 任给 $P' \in \Sigma$, 存在唯一点 $P \in \Sigma$, 使得 $\phi(P) = P'$. 我们称 P' 点为 P 在变换 ϕ 下的 **象**, 称 P 为 P' 关于变换 ϕ 的 **原象**.

定义 1.1 如果平面上的一个变换保持任意两点的距离不变,我们就称这个变换为平面的 **等距变换**.

我们用 $d(P, Q)$ 来表示 P, Q 两点之间的距离, 则 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为一个等距变换, 当且仅当对 Σ 上任意两点 P, Q , 总有

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q).$$

平面上最平凡的等距变换是 **恒同变换** $id: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 它将平面上每个点映成它自己. 换言之, 它保持平面上的每个点不动.

平面上的每条直线 l 将平面分割成两个不相交的半平面 Σ^+ 和 Σ^- . 这时, $\Sigma = \Sigma^+ \cup l \cup \Sigma^-$. 每条直线 l 唯一确定平面上的一个 **反射变换** (直线反射) $l: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 它保持直线 l 上的每一点不动, 并将 Σ^+ 中的点 P 映成它在 Σ^- 中的对称点 P' . 这里, 我们用 l 同时表示直线和关于此直线的反射变换.

图 1-1

反射变换是平面上最为简单的一类等距变换. 反射变换的另一个重要性质是: 它将每个逆时针定向的圆周 Γ 映成一个顺时针定向的圆周 Γ' , 即当动点 X 沿圆周 Γ 作逆时针运动时, 它的对称点 X' 沿 Γ' 作顺时针运动. 于是, 反射变换是平面上的一个 **反定向的变换**.

定义 1.2 设 ϕ 和 ψ 是平面 Σ 上的两个变换. 设 P 为 Σ 上一点, ϕ 将 P 映成 P' , 而 ψ 又将 P' 映成 P'' . 我们称由对应 $P \rightarrow P''$ 所给出的平面变换为 ϕ 和 ψ 的 **复合变换**, 记为 $\psi \circ \phi$.

设 l_1 和 l_2 为平面上两条直线, 它们定义了平面上的两个直线反射 $l_1, l_2: \Sigma \rightarrow \Sigma$. 我们考察它们的复合变换 $l_2 \circ l_1: \Sigma \rightarrow \Sigma$.

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条平行的直线, 我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个 **平移变换**. 设 l_1 和 l_2 的间距为 d , 则由图 1-2 可见, $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点沿 l_1 到 l_2 的垂直方向平移 $2d$ 的距离. 显然, 变换 ϕ 为平移变换的充要条件是对任何 P 来说 $\overrightarrow{P\phi(P)}$ 与 P 无关, 为常向量.

图 1-2

如果 l_1 和 l_2 是平面上两条相交直线, 我们称复合变换 $l_2 \circ l_1$ 是一个 **旋转变换**. 设 l_1 和 l_2 交点为 O , 且 l_1 绕 O 点逆时针旋转到 l_2 的旋转角度为 θ , 则由图 1-3 可见, $l_2 \circ l_1$ 将平面上的每一点绕 O 点从 l_1 到 l_2 的方向旋转 2θ 角.

图 1-3

由于平移变换或旋转变换是两个反射变换的复合, 它总将逆时针定向的圆周映成逆时针定向的圆周, 所以平移变换或旋转变换是 **保定向的变换**.

定义 1.3 设 ϕ 为平面 Σ 上的一个变换. 对 Σ 上的任意点 P' , 存在唯一点 P , 使得 $\phi(P) = P'$. 我们称由对应 $P' \rightarrow P$ 给出的平面变换为 ϕ 的 **逆变换**, 记为 ϕ^{-1} .

根据平面变换的定义, 容易得到

命题 1.1 设 ϕ, ψ 和 ρ 为平面上的变换. 则有

- (1) $(\rho \circ \psi) \circ \phi = \rho \circ (\psi \circ \phi)$;
- (2) $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = id$
- (3) $(\phi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$.

命题 1.2 如果 ϕ 和 ψ 为平面上的等距变换, 则它们的逆变换 ϕ^{-1} , ψ^{-1} 和复合变换 $\psi \circ \phi$ 也是等距变换.

证明: 设 P, Q 为平面上任意两点. 因为 ϕ 和 ψ 均为等距变换, 则有

$$d(\phi^{-1}(P), \phi^{-1}(Q)) = d(\phi(\phi^{-1}(P)), \phi(\phi^{-1}(Q))) = d(P, Q);$$

$$d(\psi(\phi(P)), \psi(\phi(Q))) = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q). \square$$

我们可以通过直线反射的多次复合来得到更多的等距变换. 显然, 奇数个直线反射的复合变换是反定向的, 偶数个直线反射的复合变换是保定向的.

命题 1.3 等距变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 将直线映成直线.

证明 设 P, Q, R 为平面上共线的三点, 且 Q 落在线段 $\overline{PR}$ 上. 则有

$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R).$$

因为 ϕ 为等距变换, 由上式得到

$$d(\phi(P), \phi(Q)) + d(\phi(Q), \phi(R)) = d(\phi(P), \phi(R)).$$

由平面几何中的三角不等式推出, $\phi(Q)$ 必定落在线段 $\overline{\phi(P)\phi(R)}$ 上. $\square$

定义 1.4 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为平面上的一个变换. 如果 $P \in \Sigma$ 满足 $\phi(P) = P$, 我们称 P 为变换 ϕ 的一个不动点.

我们知道, 平面上所有点均是恒同变换 $id: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 的不动点; 直线反射 $l: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 的不动点为直线 l 上的所有点; 旋转变换 ϕ 有唯一的不动点, 它恰是 ϕ 的旋转中心. 平移变换则没有不动点 (除非它是恒同变换).

命题 1.4 如果一个平面等距变换拥有三个不共线的不动点, 则为恒同变换.

证明 设 ϕ 是一个等距变换, 它拥有三个不共线的不动点 P, Q 和 R . 记 l 为直线 PQ . 由命题 1.3 知, ϕ 将 l 映成 l . 于是对任何 $X \in l$, 我们有 $\phi(X) \in l$, 并且

$$d(\phi(X), P) = d(\phi(X), \phi(P)) = d(X, P);$$

$$d(\phi(X), Q) = d(\phi(X), \phi(Q)) = d(X, Q).$$

故有 $\phi(X) = X$. 这说明, 直线 l 上的所有点必为 ϕ 的不动点. 同理, 直线 PR 和 QR 上的所有点均为 ϕ 的不动点. 现设 X 是平面上的任意一点, 过点 X 作一直线 l' 分别交直线 PQ 和直线 PR 于 Y 和 Z . 因为 Y 和 Z 为 ϕ 的不动点, 所以直线 YZ 上的所有点均是 ϕ 的不动点, 故 X 也是 ϕ 的不动点. 这样, 所有平面上的点均为 ϕ 的不动点, ϕ 为恒同映射. $\square$

命题 1.5 如果一个平面等距变换至少有两个不动点, 则它或是恒同变换, 或是一个直线反射.

证明 设 ϕ 是一个等距变换, 它拥有两个不共线的不动点 P 和 Q . 设 l 为直线 PQ . 如果在直线 l 外有 ϕ 的不动点, 则由命题 1.4 知 ϕ 为恒同映射. 如果在直线 l 外没有 ϕ 的不动点, 则对任何 l 外的一点 X 有

$$d(l(X), P) = d(X, P) = d(\phi(X), \phi(P)) = d(\phi(X), P);$$

$$d(l(X), Q) = d(X, Q) = d(\phi(X), \phi(Q)) = d(\phi(X), Q).$$

故 $X, l(X)$ 和 $\phi(X)$ 三点到 P, Q 的距离相等. 因为 $\phi(X) \neq X, l(X) \neq X$, 所以 $\phi(X) = l(X)$. 这时 ϕ 是直线反射. $\square$

命题 1.6 如果一个平面等距变换只有一个不动点, 则它必是一个旋转变换.

证明 设 O 为等距变换 ϕ 的唯一不动点. 任取另一个点 P , 则 $\phi(P) \neq P$. 设 l 为角 $\angle PO\phi(P)$ 的角平分线. 因为

$$d(O, \phi(P)) = d(\phi(O), \phi(P)) = d(O, P),$$

所以 $l \circ \phi(P) = P$. 于是, O 和 P 均是 $l \circ \phi$ 的不动点. 由命题 1.5, 我们知道, 或者 (1) $l \circ \phi = id$ 成立, 或者 (2) 存在直线 l' , 使得 $l \circ \phi = l'$ 成立. 由 (1) 推出, $\phi = l$, 这与 ϕ 只有一个不动点矛盾. 于是 (2) 必须成立. 故 $\phi = l' \circ l$. 由于 ϕ 只有一个不动点, 而平移变换或是没有不动点, 或为恒同变换, 所以两直线 l 和 l' 必只交于一点, 它是 ϕ 的不动点, 即为 O 点. 于是, ϕ 为旋转变换. $\square$

定理 1.1 任何一个平面等距变换可以表成至多三个的直线反射的复合.

证明 设 ϕ 是一个等距变换. 如果 $\phi = id$, 则 $\phi = l \circ l$, 命题成立. 如果 ϕ 不是恒同变换, 则存在 P 使得 $\phi(P) \neq P$. 令 l 为线段 $\overline{P\phi(P)}$ 的垂直平分线, 则有 $l \circ \phi(P) = P$. 于是 $l \circ \phi$ 至少有一个不动点. 如果 $l \circ \phi$ 只有一个不动点, 则由命题 1.6 知它是一个旋转变换, 故 $l \circ \phi = l_2 \circ l_1$, 故 $\phi = l \circ l_2 \circ l_1$. 如果 $l \circ \phi$ 至少有两个不动点, 则由命题 1.5 推出, 或者 $l \circ \phi = id$, 即 $\phi = l$; 或者 $l \circ \phi = l'$, 即 $\phi = l \circ l'$. $\square$

由于奇数个直线反射的复合变换一定是反定向的, 定理 1.1 推出

定理 1.2 平面上保定向等距变换一定是平移变换或旋转变换.

我们注意到, 如果我们将两平行直线 l_1 和 l_2 同时进行一个平移, 得到与它们平行的直线 l_3 和 l_4 (参见图 1-4a), 则 $l_2 \circ l_1$ 和 $l_4 \circ l_3$ 是平面上的同一个平移变换. 同样, 如果我们将两条相交于 O 点的直线 l_1 和 l_2 同时进行一个绕 O 点的旋转, 得到直线 l_3 和 l_4 (参见图 1-4b), 则 $l_2 \circ l_1$ 和 $l_4 \circ l_3$ 是平面上的同一个绕 O 点的旋转变换.

图 1-4a

图 1-4b

定理 1.3 (三反射定理) 设三直线 l_1, l_2 和 l_3 两两平行或相交于同一点, 则存在直线 l 使得 $l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l$.

证明 将直线 l_1 和 l_2 平移或旋转, 使得 l_2 与直线 l_3 重合. 这时 l_1 成为直线 l . 由于 $l_2 \circ l_1 = l_3 \circ l$, 故 $l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l$. $\square$

定义 1.5 设直线 l 垂直于两平行线 l_1 和 l_2 . 则 $l_2 \circ l_1$ 是沿直线 l 方向的一个平移, 且等距变换 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 是先沿直线 l 作一个平移, 然后再对直线 l 作反射. 显然, 有 $l \circ (l_2 \circ l_1) = (l_2 \circ l_1) \circ l$. 我们称 $\phi = l \circ (l_2 \circ l_1)$ 为沿直线 l 的一个滑动反射 (参见图 1-5).

图 1-5

定理 1.4 平面上的所有等距变换是由直线反射, 平移, 旋转和沿某个直线的滑动反射构成的.

证明 设平面等距变换 ϕ 不是直线反射, 也不是平移或旋转. 由定理 1.2 知 ϕ 一定可以写成 $\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1$, 并且由定理 1.3 知, l_1, l_2 和 l_3 不能两两平行, 也不能相交于同一点. 不妨设 l_2 与 l_3 相交于一点 O , 且 O 不落在 l_1 上.

图 1-6a

图 1-6b

将 l_2 和 l_3 同时作一个绕 O 的旋转, 得到 l'_2 和 l , 使得 l'_2 与 l_1 垂直 (参见图 1-6a). 则有 $l_3 \circ l_2 = l \circ l'_2$. 设 l'_2 与 l_1 交于 O' 点. 而 l'_2 与 l_1 再绕 O' 进行一个旋转, 得到 l_2^* 和 l'_1 , 使得 l'_1 与 l_3 也垂直 (参见图 1-6b). 则有 $l'_2 \circ l_1 = l_2^* \circ l'_1$. 于是得到

$$\phi = l_3 \circ l_2 \circ l_1 = l \circ l'_2 \circ l_1 = l \circ l_2^* \circ l'_1.$$

这时, l'_1 和 l_2^* 垂直于 l . 故 ϕ 是沿直线 l 的一个滑动反射. $\square$

1.2 空间等距变换

我们称 $\mathbb{E}^3$ 到它自身的一一对应为空间的一个变换. 如果空间中的一个变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 保持任意两点的距离不变, 我们就称 ϕ 为等距变换.

我们同样用 $d(P, Q)$ 表示 $\mathbb{E}^3$ 中两点 P, Q 之间的距离, 用 id 表示 $\mathbb{E}^3$ 到它自身的恒同变换. 容易验证, 两个空间等距变换的复合还是等距变换; 等距变换的逆变换仍是等距变换.

空间中的每张平面 Σ 将空间分割成两个互不相交的半空间 $\mathbb{E}_+^3$ 和 $\mathbb{E}_-^3$. 这时 $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}_+^3 \cup \Sigma \cup \mathbb{E}_-^3$. 平面 Σ 诱导一个空间等距变换 $\Sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 称为 **平面反射**, 它保持平面 Σ 上的每一点不动, 并将 $\mathbb{E}_+^3$ 中的点 P 映成它在 $\mathbb{E}_-^3$ 中的对称点 P' . 我们用同一个记号 Σ 来表示平面和关于此平面的平面反射.

平面反射 $\Sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是空间中最简单的等距变换, 它将平面映成平面, 将直线映成直线, 将向量 (有向线段) 映成向量. 此外, 平面反射将空间中每个右手系的标架映成左手系的标架 (参见图 1-7), 故它是空间中一个反定向的等距变换.

图 1-7

设 Σ_1 和 Σ_2 是两张平行的平面, 间距为 d . 则平面反射 Σ_1 和 Σ_2 的复合映射 $\Sigma_2 \circ \Sigma_1: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是空间中的一个平移变换, 它将空间中的每个点沿 Σ_1 至 Σ_2 的垂直方向平移 $2d$ 的距离 (参见图 1-8).

图 1-8

设 Σ_1 和 Σ_2 是两张相交的平面, 交线为 l . 我们选定 l 的一个方向, 用右手拇指指向这个选定的方向, 沿右手其它四指自然弯曲的方向从 Σ_1 至 Σ_2 可以确定两平面的一个夹角 θ . 容易验证, 平面反射 Σ_1 和 Σ_2 的复合映射 $\Sigma_2 \circ \Sigma_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是空间中绕直线 l 的一个旋转, 旋转方向为四指自然弯曲的方向, 旋转的角度为 2θ (参见图 2-10).

图 1-9

假如我们先前选定的是 l 的另一个方向, 则所确定的 Σ_1 与 Σ_2 的夹角为 $180^\circ - \theta$, 这时, $\Sigma_2 \circ \Sigma_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是空间中绕直线 l 的一个反方向的旋转, 旋转角度为 $360^\circ - 2\theta$. 我们注意到, 只要 $\theta_1 + \theta_2$ 是 360° 的整数倍, 则空间中的任意点 P 绕直线 l 旋转 θ_1 角所得到的点和 P 点绕直线 l 反方向旋转 θ_2 角所得到的点相同.

由于平面反射是反定向的, 所以奇数个平面反射的复合变换是反定向的; 偶数个平面反射的复合变换是保定向的. 由此得到, 空间中的平移变换和旋转变换均是保定向的变换: 它们将每个右手系的标架映成右手系的标架.

命题 1.7 空间等距变换将直线映成直线, 将平面映成平面, 并且诱导直线到直线, 平面到平面的等距对应.

证明 设 $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为等距变换. 参照命题 1.3 的证明方法, 我们容易验证, ϕ 将直线映成直线. 设 Σ 是空间中的一张平面. 在 Σ 上取两条相交的直线 l_1 和 l_2 , 交点为 O . 则 $l'_1 = \phi(l_1)$ 和 $l'_2 = \phi(l_2)$ 也是两条相交直线, 交点为 $O' = \phi(O)$. 令 Σ' 为 l'_1 和 l'_2 张成的平面. 过 Σ 上的任意一个 X 作直线 l 分别交 l_1, l_2 于 P 和 Q . 则 $\phi(l)$ 是一条直线, 它分别交直线 l'_1 和 l'_2 于 $\phi(P)$ 和 $\phi(Q)$. 故 $\phi(l)$ 落在平面 Σ' 上. 特别地, $\phi(X)$ 落在平面 Σ' 上. 由此得到, $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$. 由于 ϕ^{-1} 也是等距变换, 它将 l'_1 和 l'_2 分别映成 l_1 和 l_2 , 故有 $\phi^{-1} : \Sigma' \rightarrow \Sigma$. 这样, $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 为一一对应, 并保持两点间的距离不变. $\square$

命题 1.8 如果一个空间等距变换拥有三个不共线的不动点, 则它或是恒同变换, 或是一个平面反射.

证明 设 ϕ 是一个等距变换, 它拥有三个不共线的不动点 P, Q, R . 记 Σ 为这三个不动点所确定的平面. 则 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为等距变换. 由命题 1.3 知, Σ 上的所有点为 ϕ 的不动点. 平面 Σ 将空间分割成两个不相交的半空间 $\mathbb{E}_+^3$ 和 $\mathbb{E}_-^3$.

如果存在平面 Σ 外一点 O , 使得 O 和 $O' = \phi(O)$ 落在同一个半空间中, 则由等式

$$d(O, P) = d(\phi(O), \phi(P)) = d(O', P);$$

$$d(O, Q) = d(\phi(O), \phi(Q)) = d(O', Q);$$

$$d(O, R) = d(\phi(O), \phi(R)) = d(O', R).$$

因为 O 和 O' 到平面 Σ 上不共线三点 P, Q, R 的距离相等, 所以 $O = O' = \phi(O)$. 记 Σ' 为 ϕ 的三个不共线不动点 O, P, Q 所确定的平面. 同样, Σ' 上的所有点为 ϕ 的不动点. 由于 Σ 和 Σ' 为两个相交的平面, 过空间中的任意点 X 可以作直线 l , 它与 Σ 和 Σ' 分别交于 A 和 A' . 由于 A 和 A' 均为 ϕ 的不动点, X 和 $\phi(X)$ 均落在直线 l 上, 并且它们到 A 和 A' 的距离相等. 由此推出 $\phi(X) = X$. 故 $\phi = id$.

如果存在平面 Σ 外一点 O , 使得 O 和 $O' = \phi(O)$ 落在不同的半空间中, 则 $\Sigma \circ \phi$ 同样保持 Σ 上的所有点不动, 且 O 和 $\Sigma \circ \phi(O)$ 落在同一个半空间中. 由上面的证明推出 $\Sigma \circ \phi = id$. 这时, $\phi = \Sigma$ 为平面反射. $\square$

命题 1.9 如果一个空间等距变换至少拥有两个不动点, 则它或是一个平面反射, 或是一个旋转变换.

证明 设 ϕ 为空间等距变换. 如果 ϕ 拥有三个不共线的不动点, 则由命题 1.8 得知, ϕ 是恒同变换 (特殊的旋转变换) 或平面反射. 以下设 ϕ 拥有两个不动点 P 和 Q , 并且所有不动点共线. 设 l 为直线 PQ . 则 $\phi(l) = l$, 并且 l 上的所有点均为 ϕ 的不动点. 除此之外, ϕ 不再有其它的不动点. 我们在 l 外任取一点 R , 则对 l 上的任意点 X 恒有

$$d(\phi(R), X) = d(\phi(R), \phi(X)) = d(R, X).$$

从 R 点引直线 l 的垂线, 垂足为 O . 于是, 对 l 上的任意点 X , 有

$$d(\phi(R), O) = d(R, O) \leq d(R, X) = d(\phi(R), X).$$

所有, 直线 $\phi(R)O$ 也垂直于直线 l . 由此推出, 线段 $\overline{\phi(R)R}$ 垂直于直线 l . 过线段 $\overline{\phi(R)R}$ 的中点 M 和直线 l 作平面 Σ (参见图 1-10), 则平面反射 $\Sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 保持 l 上的点不动, 并将 R 映成 $\phi(R)$.

图 1-10

这样, 等距变换 $\Sigma \circ \phi$ 以直线 l 和 R 为不动点. 由命题 1.8, 或者 (1) $\Sigma \circ \phi = id$, 或者 (2) $\Sigma \circ \phi = \Sigma'$. 如果 (1) 成立, 则 $\phi = \Sigma$, 这时 ϕ 的不动点为整个平面 Σ , 矛盾. 所以, (2) 必须成立, 这样 $\phi = \Sigma \circ \Sigma'$. 因为平移变换没有不动点 (除非为恒同映射), 故 Σ 和 Σ' 必相交. 由此推出, ϕ 是一个旋转变换. $\square$

命题 1.10 如果一个空间等距变换至少有一个不动点, 则它可以表成至多三个平面反射的复合.

证明 设 O 是等距变换 ϕ 的不动点. 如果 ϕ 是恒同映射, 则 $\phi = \Sigma \circ \Sigma$. 如果 ϕ 不是恒同映射, 则存在 P 使得 $\phi(P) \neq P$. 由于

$$d(O, P) = d(\phi(O), \phi(P)) = d(O, \phi(P)),$$

所以 $\triangle OP\phi(P)$ 是一个等腰三角形. 令 Σ 是与此三角形垂直, 并过 O 点及线段 $\overline{P\phi(P)}$ 中点的平面. 则有 O 和 P 是等距变换 $\Sigma \circ \phi$ 的两个不动点. 由命题 1.8 知, $\Sigma \circ \phi$ 至多可以表成两个平面反射的复合. 故 ϕ 可以表成至多三个平面反射的复合. $\square$

因为奇数个平面反射的复合是反定向的等距变换, 所以从命题 1.10 我们得到

定理 1.5 空间中保定向的等距变换如果有不动点, 则它必为空间中以某个直线为轴的旋转变换.

定理 1.6 任何空间等距变换可以表成不超过四个平面反射的复合.

证明 不妨设 ϕ 不是恒同变换. 则存在 P 使得 $\phi(P) \neq P$. 设 Σ 是线段 $\phi(P)P$ 的垂直平分面, 则 $\Sigma\phi$ 拥有不动点 P , 它是不超过三个平面反射的复合. 故 ϕ 可表成不超过四个平面反射的复合. $\square$

1.3 图形的对称群

设 $\mathbb{G}$ 是由平面 (空间) 到它自身的部分变换构成的集合. 如果 $\mathbb{G}$ 满足以下性质:

- (1) $id \in \mathbb{G}$;
- (2) 对任何 $\phi, \psi \in \mathbb{G}$ 恒有 $\psi \circ \phi \in \mathbb{G}$;
- (3) 对任何 $\phi \in \mathbb{G}$, 有 $\phi^{-1} \in \mathbb{G}$;

我们就称 $\mathbb{G}$ 是平面上 (空间中) 的一个变换群. 如果 G 中的任意两个变换满足 $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$, 则称 $\mathbb{G}$ 是一个交换群.

以下是平面上一些变换群的实例:

- (1) $\mathbb{G} = \{id\}$ 是一个平凡的变换群, 它只有一个元素;
- (2) $\mathbb{G} = \{id, l\}$ 是平面上最为简单的 (非平凡的) 变换群, 它只有两个元素, 一个是恒同变换, 一个是直线反射;
- (3) 平面上的所有变换构成一个变换群.
- (4) 平面 Σ 上所有的等距变换构成一个变换群 $Iso(\Sigma)$, 称为平面等距群;
- (5) 平面 Σ 上所有保定向的等距变换构成一个变换群 $Iso^+(\Sigma)$, 称为平面刚体运动群;
- (6) 平面上以 P 为旋转中心的所有旋转变换构成一个变换群 $O_P(2)$, 称为 P 点处的正交群;
- (7) 平面上以 P 为旋转中心的所有旋转变换构成一个交换群 $SO_P(2)$, 称为 P 点处的旋转群;
- (8) 平面上所有平移变换构成一个交换群, 称为平面平移变换群.

请读者验证 (1) 至 (6). 以下我们只对 (7) 和 (8) 进行验证.

设 ϕ 和 ψ 是平面上以 O 点为旋转中心的两个旋转变换, 它们的旋转角分别是 θ 和 θ' . 则 $\psi \circ \phi$ 和 $\phi \circ \psi$ 均是以 O 点为旋转中心的旋转变换, 它们的旋转角同为 $\theta + \theta'$, 故 $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$. 而 ϕ^{-1} 也是以 O 点为旋转中心的旋转变换, 它的旋转角为 $-\theta$. 这样, 平面上以 O 为旋转中心的所有旋转变换构成一个交换群.

设 ϕ 和 ψ 是平面上的两个平移变换. 则对任何 P 来说

$$\overrightarrow{P\phi(P)} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{P\psi(P)} = \mathbf{b}$$

是一个与 P 无关的常向量. 由此推出

$$\overrightarrow{P\psi(\phi(P))} = \overrightarrow{P\phi(P)} + \overrightarrow{\phi(P)\psi(\phi(P))} = \overrightarrow{P\phi(P)} + \overrightarrow{P'\psi(P')} = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{P\phi(\psi(P))} = \overrightarrow{P\psi(P)} + \overrightarrow{\psi(P)\phi(\psi(P))} = \overrightarrow{P\psi(P)} + \overrightarrow{P''\phi(P'')} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{P\phi^{-1}(P)} = \overrightarrow{\phi(P^*)P^*} = -\overrightarrow{P^*\phi(P^*)} = -\mathbf{a};$$

其中 $P' = \phi(P)$, $P'' = \psi(P)$, $P^* = \phi^{-1}(P)$. 于是 $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ 和 ϕ^{-1} 均为平移变换, 并且 $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$. 故平面上所有平移变换构成一个交换群.

我们称平面 Σ 上的子集为平面上的一个图形. 设 M 为平面上的一个图形. 我们定义图形 M 的等距对称群 $Iso(M)$ 为

$$Iso(M) = \{\phi \in Iso(\Sigma) \mid \phi(M) = M\}.$$

请读者自行验证, 图形的等距对称群是平面上的一个变换群. 我们记 $|Iso(M)|$ 为对称群 $Iso(M)$ 的元素个数.

显然, 一个三边不等的三角形 M 的等距对称群没有非恒同元素. 一个等腰而不同边的三角形的等距对称群只有一个非恒同元素 l , 它是关于顶角平分线的直线反射.

一个等边三角形 Δ_3 可以绕其重心逆时针旋转 120° 和 240° , 而将三角形变成它自己; 还可以关于三角形的三条高作直线反射, 将三角形变成它自己. 故等边三角形的等距对称群 $Iso(\Delta_3)$ 拥有 5 个非恒同元素.

圆是无穷对称的, 每个过圆心的直线所对应的直线反射均将圆变成它自己; 每个绕圆心的旋转也将圆变成它自己.

在空间中我们有以下一些变换群的实例:

- (1) $\mathbb{G} = \{id, \Sigma\}$ 是空间中最为简单的 (非平凡) 变换群, 它只有两个元素, 一个是恒同变换, 一个是平面反射;
- (2) 空间中以直线 l 为旋转轴的所有旋转变换构成一个交换群;
- (3) 空间中所有平移变换构成一个交换群, 称为空间平移群;

- (4) 空间中所有的等距变换构成一个变换群 $Iso(\mathbb{E}^3)$, 称为空间等距变换群;
- (5) 空间中所有保定向的等距变换构成一个变换群 $Iso^+(\mathbb{E}^3)$, 称为空间刚体运动群;
- (6) 空间中以 P 为不动点的等距变换构成一个变换群 $O_P(3)$, 称为 P 点处的正交群;
- (7) 空间中以 P 为不动点的保定向等距变换构成一个变换群 $SO_P(3)$, 称为 P 点处的旋转群.

请读者自行验证以上断言.

我们称空间中不落在任何平面上的子集为一个立体图形. 设 M 为空间中的一个立体图形. 我们定义

- (i) 图形 M 的等距对称群 $Iso(M)$ 为

$$Iso(M) = \{\phi \in Iso(\mathbb{E}^3) \mid \phi(M) = M\}.$$

- (ii) 图形 M 的以 P 为中心的旋转对称群 $SO_P(M)$ 为

$$SO_P(M) = \{\phi \in SO_P(3) \mid \phi(M) = M\}.$$

球面是无穷对称的, 每个过球心的平面所对应的平面反射均将球面变成它自己; 每个以过球心直线为旋转轴的旋转变换也将球面映成自己.

我们常在生活中遇到以下高度对称的多面体, 它们是正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体 (参见图 1-11).

这些正多面体有如下的性质:

- (i) 它的每个面是有相同边数的正多边形;
- (ii) 它的每个顶点出发的棱的个数相同;
- (iii) 它的所有顶点落在同一个球面上.

正多面体的每个面是一个正多边形。我们称每个正多边形的外接圆圆心为正多边形的重心。正多面体每个面的重心连线又构成一个正多面体，称为它的对偶正多面体。于是，正四面体是自对偶的；正六面体的对偶是正八面体；而正十二面体的对偶是正二十面体。

设 $\mathbb{P}$ 是一个正多面体。我们来确定 $\mathbb{P}$ 的关于它的重心的旋转对称群 $SO(\mathbb{P})$ 。 $SO(\mathbb{P})$ 中非恒同的元素称为 $\mathbb{P}$ 的一个旋转对称。

正四面体可以以每个顶点与其对面重心的连线为轴旋转 120° 和 240° ，而将正四面体变成自己。这样的旋转对称有 8 个。也可以以每对对边的中点连线为轴旋转 180° ，而将正四面体变成自己。这样的旋转对称有 3 个。所以，正四面体共有 11 个不同的旋转对称（参见图 1-12）。

正六面体可以以每对对面的重心连线为轴，旋转 90° 、 180° 和 270° ，而保持自己不变。这样的旋转对称有 9 个。也可以以每对对顶点为轴旋转 120° 和 240° ，而将正六面体变成自己。这样的旋转对称有 8 个。还可以以每对对棱的中点连续为轴，旋转 180° ，而将正六面体变成自己。这样的旋转对称有 6 个。所以，正六面体共有 23 个不同的旋转对称（参见图 1-13）。

正八面体和正六面体是相互对偶的。由于旋转对称将重心映成重心，所以正八面体的旋转对称与正六面体的旋转对称相同，它共有 23 个不同的旋转对称。故正八面体的对称度为 47。

正二十面体有 20 个面，30 个棱和 12 个顶点。它可以以每对对顶点的连线为轴旋转 72° ， 144° ， 216° 和 288° ，而将正二十面体变成自己。这样的旋转对称有 24 个。也可以以每对对面的重心连线为轴旋转 120° 和 240° ，而将正二十面体变成自己。这样的旋转对称有 20 个。还可以以每对对边的中点连线为轴旋转 180° ，而保持自己不变。这样的旋转对称有 15 个。所以，正二十面体共有 59 个不同的旋转对称（参见图 1-14）。

正十二面体和正二十面体是相互对偶的。所以，它共有 59 个不同的旋转对称。

设 $\mathbb{P}$ 是一个正多面体。我们用 m 来表示正多边形的边数，用 n 来表示从顶点出发的棱的个数。从图 1-11 可见， (m, n) 可以取到以下的数值： $(3, 3)$ ， $(4, 3)$ ， $(3, 4)$ ， $(3, 5)$ 和 $(5, 3)$ 。

定理 1.7 正多面体只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体这五种类型。

证明 正多面体的每个面是一个正 m 边形，它的内角为 $(m-2)\pi/m$ 。由于每个顶点处的锥面有 n 个这样的角，这些角加起来小于 2π ，故

$$n \frac{(m-2)\pi}{m} < 2\pi.$$

这样便有

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

由 m 和 n 的几何意义，必须 $m \geq 3$ 和 $n \geq 3$ 。这样，不等式推出 $m \leq 6$ 和 $n \leq 6$ 。如果 m 为 4 或 5，则 n 只能取 3。如果 $m = 3$ ，则由不等式， n 可以取 3, 4 或 5。于是， (m, n) 只能 $(3, 3)$ ， $(4, 3)$ ， $(3, 4)$ ， $(3, 5)$ 和 $(5, 3)$ 这五种数值。□

习题 II-1

1. 求两条平面直线 l_1 和 l_2 满足 $l_1 \circ l_2 = l_2 \circ l_1$ 的条件。
2. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 分别是绕 O_1 和 O_2 点的平面旋转变换。问：何时 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ ？
3. 设 l 和 l' 为平面 Σ 上的两条直线。证明：存在一个平面等距变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ，使得 $\phi(l) = l'$ 。
4. 证明：偶数个直线反射的复合为旋转变换或平移变换。
5. 设锐角三角形 ABC 的三高 AD , BE , CF 的垂足分别为 D , E 和 F 。证明：在 ABC 的所有内接三角形中，三角形 DEF 的周长最短。
6. 设 ϕ 和 ψ 为两个平面等距变换。设存在平面上不共线的三点 P, Q, R ，使得 $\phi(P) = \psi(P)$, $\phi(Q) = \psi(Q)$, $\phi(R) = \psi(R)$ 。证明： $\phi = \psi$ 。
6. 设 O 为平面 Σ 上一点， λ 为非零实数。对任何 $X \in \Sigma$ ，定义 $X' \in \Sigma$ 满足 $\overrightarrow{OX'} = \lambda \overrightarrow{OX}$ 。我们称由 $X \rightarrow X'$ 所给出的平面变换为位似变换，称 O 为位似中心，称 λ 为位似常数。证明：

- (1) 平面位似变换是保定向的变换；
- (2) 位似变换将直线变成与之平行的直线；

(3) 所有以 O 为位似中心的位似变换构成一个交换的变换群.

6. 设 ϕ 和 ψ 为两个空间等距变换. 设存在不共面的三点 P, Q, R, S , 使得 $\phi(P) = \psi(P), \phi(Q) = \psi(Q), \phi(R) = \psi(R), \phi(S) = \psi(S)$. 证明: $\phi = \psi$.

6. 证明: 空间等距变换 ϕ 只有一个不动点 O 的充要条件是存在过 O 点的三张平面 Σ_1, Σ_2 和 Σ_3 , 使得 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{O\}$, 并且 $\phi = \Sigma_3 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1$.

7. 证明: 以过定点 O 的直线为旋转轴的所有空间旋转变换构成一个变换群. 这个变换群是否可交换?

8. 设平面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 过直线 l . 证明: 存在唯一过 l 的平面 Σ_4 , 使得 $\Sigma_3 \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1 = \Sigma_4$.

9. 设 O 为空间 $\mathbb{E}^3$ 上一点, λ 为非零实数. 对任何 $X \in \mathbb{E}^3$, 定义 $X' \in \mathbb{E}^3$ 满足 $\overrightarrow{OX'} = \lambda \overrightarrow{OX}$. 我们称由 $X \rightarrow X'$ 所给出的空间变换为位似变换, 称 O 为位似中心, 称 λ 为位似常数.

(1) 问: 空间位似变换是否保定向, 何时保定向?

(2) 证明: 位似变换将向量变成向量, 并保持两向量间的夹角不变;

(3) 证明: 所有以 O 为位似中心的位似变换构成一个交换的变换群.

5. 设平面等距变换 ϕ 满足 $\phi \circ \phi = id$. 证明: ϕ 或是恒同变换, 或是直线反射, 或是一个中心对称.

10. 设 Σ 和 Σ' 为空间中的两个平面. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi(\Sigma) = \Sigma'$.

11. 设 l 和 l' 为空间中的两条直线. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi(l) = l'$.

12. 设 Σ 和 Σ' 为空间中的两个平面. $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个等距映射 (即保距离的一一对应). 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi = \varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$.

13. 设 l 和 l' 为空间中的两条直线. $\varphi: l \rightarrow l'$ 是一个等距映射. 证明: 存在空间中的一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得 $\phi = \varphi: l \rightarrow l'$.

14. 设 $\mathbb{P}$ 是一个凸多面形, A 为 $\mathbb{P}$ 的一个顶点. 记 $\theta(A)$ 为所有以 A 为顶点的面在 A 点处的角的总和 (以弧度计算). 我们定义多面形在 A 点处的曲率

$$K(A) = 2\pi - \theta(A).$$

显然, 曲率越大, $\theta(A)$ 越小, 顶点 A 越“尖”. 问:

- (i) 五种正多面形在顶点处的曲率各是多少？
 - (ii) 五种正多面形所有顶点处的曲率之和各是多少？
15. 设 $\mathbb{P}$ 是一个凸多面形。证明：它在所有顶点处的曲率之和为 4π 。

§2 仿射变换

2.1 仿射变换诱导的线性变换

定义 2.1 设 Σ 和 Σ' 为两张平面, $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个一一对应, 它将直线映成直线, 我们就称 ϕ 为平面仿射映射. 当 $\Sigma = \Sigma'$ 时, 我们称 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 为平面仿射变换.

定义 2.2 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是空间的一个变换, 它将直线变成直线, 我们就称 ϕ 为空间仿射变换.

由命题 1.3 和命题 1.7 知, 等距变换是特殊的仿射变换.

命题 2.1 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个平面间的仿射映射, 则 $\phi^{-1}: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ 也是一个仿射映射.

证明 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个仿射映射, 它将直线映成直线. 我们需要证明: ϕ^{-1} 也将直线映成直线. 我们用反证法. 假如 ϕ^{-1} 将某条线 l' 的三点 A', B', C' 分别对应到不共线的三点 A, B, C . 由于 $\phi(A) = A', \phi(B) = B', \phi(C) = C'$, 而 ϕ 将直线映成直线. 所以 ϕ 将两条不同的直线 AB 和 AC 均映成直线 l' . 任给 $X \in \Sigma$, 存在过 X 的直线 l_X 分别交直线 AB, AC 于不同的两点 P, Q . 由于 $\phi(P)$ 和 $\phi(Q)$ 落在直线 l' 上, ϕ 将直线 l_X 映成直线 $\phi(PQ) = l'$. 故 $\phi(X) \in l'$. 由此得到: $\phi(\Sigma) \subset l'$. 这样, ϕ 不是一一对应. 矛盾. 这说明 $\phi^{-1}: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ 也将直线映成直线. $\square$

命题 2.2 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换, 则 $\phi^{-1}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 也是一个仿射变换.

证明 用反证法. 设 ϕ^{-1} 将某条线 l' 的三点 A', B', C' 分别对应到不共线的三点 A, B, C . 设 Σ 是相交直线 AB 和 AC 张成的平面. 利用命题 2.1 的证明同样得到 $\phi(\Sigma) \subset l'$. 取直线 l , 它与平面 Σ 仅交一点 O . 我们记 $\phi(l) = l''$. 则 l' 和 l'' 有公共点 $\phi(O)$. 设 Σ' 是一张含有直线 l' 和 l'' 的平面. 对任何 $Y \in \mathbb{E}^3$, 存在过 Y 的直线 l_Y 分别交 l, Σ 于不同的两点 R, S . 由于 $\phi(R) \in l'', \phi(S) \in l'$, 且 ϕ 将直线 l_Y 映成平面 Σ' 上的一条直线. 故 $\phi(Y) \in \Sigma'$. 这样, 我们得到 $\phi(\mathbb{E}^3) \subset \Sigma'$. 这与 ϕ 是空间的变换相矛盾. 于是, ϕ^{-1} 也将直线映成直线, 即 ϕ^{-1} 也是一个仿射变换. $\square$

由此, 我们容易得到以下的

推论 2.1

(1) 仿射变换将相交直线映成相交直线;

- (2) 仿射变换将平行的直线映成平行的直线;
- (3) 仿射变换将平行四边形映成平行四边形;
- (3) 仿射变换将平面映成平面;
- (4) 仿射变换将相交平面映成相交平面;
- (5) 仿射变换将平行平面映成平行平面;
- (6) 所有空间仿射变换构成一个变换群 (称为空间仿射变换群).
- (7) 平面 Σ 上的所有仿射变换构成一个变换群 (称为平面仿射变换群).

定义 2.3 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为仿射变换. 设 $\mathbb{V}$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中的所有向量构成的空间. 对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, 我们取两点 $A, B \in \mathbb{E}^3$, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义仿射变换 ϕ 所诱导的向量变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 为

$$\phi(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

这里, 我们用同样的记号 ϕ 来表示仿射变换和它所诱导的向量空间的变换.

设 C, D 为另外两点, 满足 $\mathbf{a} = \overrightarrow{CD}$. 由于 $\{A, B, C, D\}$ 为平行四边形的四个顶点, 则 $\{\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(D)\}$ 为平行四边形的四个顶点, 故

$$\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \overrightarrow{\phi(C)\phi(D)}.$$

于是, 向量变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 的定义是合理的.

命题 2.3 仿射变换 ϕ 诱导的向量变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 满足以下性质:

- (1) $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且 $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- (2) $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$;
- (3) $\phi(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) - \phi(\mathbf{b})$;
- (4) 对任何有理数 q 及 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ 有 $\phi(q\mathbf{a}) = q\phi(\mathbf{a})$.
- (5) 对任何非零实数 λ , 存在唯一非零实数 μ , 使得对任何向量 $\mathbf{a}$, 恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \mu\phi(\mathbf{a})$.

证明 (1). 由定义, 有 $\phi(\vec{0}) = \phi(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(A)} = \vec{0}$. 如果 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 使得 $\phi(\mathbf{a}) = \vec{0}$, 则有 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \vec{0}$, 所以 $\phi(A) = \phi(B)$. 因为 ϕ 是一个变换, 故 $A = B$, 即 $\mathbf{a} = \vec{0}$.

(2) 取空间中三点 $A, B, C \in \mathbb{E}^3$, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. 由定义, 有

$$\phi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \phi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} + \overrightarrow{\phi(B)\phi(C)},$$

故 $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$. 于是对任何正整数 m 有 $\phi(m\mathbf{a}) = m\phi(\mathbf{a})$.

(3) 由性质 (2) 得到 $\phi(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \phi(\mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a})$, 故 $\phi(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) - \phi(\mathbf{b})$. 特别取 $\mathbf{a} = \vec{0}$ 时, 得到 $\phi(-\mathbf{b}) = -\phi(\mathbf{b})$. 于是对任何整数 m 有 $\phi(m\mathbf{a}) = m\phi(\mathbf{a})$.

(4) 设 $q = m/n$, 其中 m 和 n 为整数, 且 $n \neq 0$. 因为 $\phi(\mathbf{a}) = \phi(n(\mathbf{a}/n)) = n\phi(\mathbf{a}/n)$, 所以 $\phi(\mathbf{a}/n) = \phi(\mathbf{a})/n$. 故有

$$\phi(q\mathbf{a}) = \phi(m\mathbf{a}/n) = m\phi(\mathbf{a}/n) = m\phi(\mathbf{a})/n = q\phi(\mathbf{a}).$$

(5) 任给一个非零实数 λ . 取空间中的一个非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. 令 $\lambda\mathbf{a} = \overrightarrow{OA'}$, 则 O , A 和 A' 三点共线. 因为 ϕ 是一个仿射变换, 所以 $\phi(O)$, $\phi(A)$ 和 $\phi(A')$ 也三点共线. 于是存在非零实数 μ , 使得 $\overrightarrow{\phi(O)\phi(A')} = \mu\overrightarrow{\phi(O)\phi(A)}$, 即 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \mu\phi(\mathbf{a})$. 设 $\mathbf{b}$ 是与 $\mathbf{a}$ 不共线的一个向量. 令 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ 和 $\lambda\mathbf{b} = \overrightarrow{OB'}$.

图 2-1

因为两直线 AA' 和 BB' 平行, ϕ 为仿射变换, 所以直线 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(A')}$ 与 $\overrightarrow{\phi(B)\phi(B')}$ 也平行 (参见图 2-1), 并且也有 $\overrightarrow{\phi(O)\phi(B')} = \mu\overrightarrow{\phi(O)\phi(B)}$, 即 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$. 若 $\tilde{\mathbf{a}}$ 是一个与 $\mathbf{a}$ 共线的非零向量, 由于 $\tilde{\mathbf{a}}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 同理由 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$ 可以推出 $\phi(\lambda\tilde{\mathbf{a}}) = \mu\phi(\tilde{\mathbf{a}})$. 于是, 对任何

非零向量 $\mathbf{b}$, 有 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$. 因为 $\phi(\mathbf{b}) \neq 0$, μ 由 λ 所唯一确定. 显然, 等式 $\phi(\lambda\mathbf{b}) = \mu\phi(\mathbf{b})$ 对 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{b} = 0$ 也自然成立. 故性质 (5) 成立. $\square$

定理 2.1 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换, 则 ϕ 诱导的向量变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 为线性变换, 即对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 均有 $\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b})$.

证明 由命题 2.2 的性质 (5) 知, 对任何非零实数 λ , 存在唯一非零实数 μ , 使得对任何向量 $\mathbf{a}$, 恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \mu\phi(\mathbf{a})$. 如果 $\lambda > 0$, 则对 $\sqrt{\lambda}$, 存在非零实数 ν , 使得对任何非零向量 $\mathbf{a}$, 均有 $\phi(\sqrt{\lambda}\mathbf{a}) = \nu\phi(\mathbf{a})$. 由此得到

$$\phi(\lambda\mathbf{a}) = \phi(\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}\mathbf{a})) = \nu\phi(\sqrt{\lambda}\mathbf{a}) = \nu^2\phi(\mathbf{a}).$$

于是我们知道, 如果 $\lambda > 0$, 则它所对应的 $\mu > 0$. 由 $\phi(-\lambda\mathbf{a}) = -\mu\phi(\mathbf{a})$ 知, 如果 $\lambda < 0$, 则它对应的 $\mu < 0$. 这样我们总有 $\lambda\mu > 0$. 以下我们用反证法证明: $\lambda = \mu$. 若不然, 则存在一个有理数 q , 使得 $\lambda - q$ 和 $\mu - q$ 异号. 这时, 利用命题 1.13 的性质 (iv) 有

$$\phi((\lambda - q)\mathbf{a}) = \phi(\lambda\mathbf{a}) - q\phi(\mathbf{a}) = (\mu - q)\phi(\mathbf{a}).$$

但这时却有 $(\lambda - q)(\mu - q) < 0$, 我们得到一个矛盾. 这样我们证明了, 对任何非零实数 λ 和非零向量 $\mathbf{a}$, 恒有 $\phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\phi(\mathbf{a})$. 于是, 对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$, 均有

$$\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \phi(\lambda\mathbf{a}) + \phi(\mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b}). \quad \square$$

定义 2.4 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 为平面仿射映射. 设 $\mathbb{V}_\Sigma$ 和 $\mathbb{V}_{\Sigma'}$ 分别是平面 Σ 和 Σ' 上的所有向量构成的空间. 对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}_\Sigma$, 我们取两点 $A, B \in \Sigma$, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义仿射变换 ϕ 所诱导的向量变换 $\phi: \mathbb{V}_\Sigma \rightarrow \mathbb{V}_{\Sigma'}$ 为

$$\phi(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

同样, 这个定义是合理的.

与空间仿射变换的情形一样, 我们有

定理 2.2 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个仿射映射, 则 ϕ 诱导的向量变换 $\phi: \mathbb{V}_\Sigma \rightarrow \mathbb{V}_{\Sigma'}$ 为线性变换, 即对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 均有 $\phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b})$.

2.2 仿射变换的不变量

定理 2.3 仿射映射或变换将共线的三点变成共线的三点, 并保持分比不变.

证明 设 A, B 和 C 为共线三点. 因为仿射变换 ϕ 将直线变成直线, 所以 $\phi(A), \phi(B)$ 和 $\phi(C)$ 也是共线的三点. 设 A, B 和 C 三点的分比 $(A, B; C) = \lambda$, 则有 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. 于是, 由定理 2.1 或定理 2.2 知

$$\overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} = \phi(\overrightarrow{AC}) = \lambda \phi(\overrightarrow{CB}) = \lambda \overrightarrow{\phi(C)\phi(B)}.$$

故 $\phi(A), \phi(B)$ 和 $\phi(C)$ 三点的分比也是 λ . $\square$

命题 2.4 如果仿射变换 ϕ 有两个不动点 A 和 B , 则 ϕ 保持直线 AB 上的所有点不动.

证明 设 C 为直线 AB 上异于 B 的点, 且 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. 由定理 2.2 知 $\overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} = \lambda \overrightarrow{\phi(C)\phi(B)}$. 因为 $\phi(A) = A$ 和 $\phi(B) = B$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{\phi(C)B}$. 由此得到

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C\phi(C)} = \lambda \overrightarrow{\phi(C)C} + \lambda \overrightarrow{CB}.$$

故 $(1 + \lambda)\overrightarrow{\phi(C)C} = 0$. 由于 $C \neq B$, 所以 $\lambda + 1 \neq 0$, 故 $\phi(C) = C$. $\square$

命题 2.5 如果仿射变换 ϕ 有三个不共线的不动点 A, B 和 C , 则 ϕ 保持此三点所确定的平面 Σ 上的所有点不动.

证明 设仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 有三个不共线的不动点 A, B 和 C , 则由命题 2.3 知, ϕ 保持三直线 AB, BC 和 AC 上的所有点不动. 现设 X 是 A, B 和 C 所确定平面 Σ 上的任一点. 过 X 且在平面 Σ 上的一直线 l 必与三直线 AB, BC 和 AC 交两点 P 和 Q . 由于 P 和 Q 是 ϕ 的不动点, 故由命题 2.3 知, l 上的所有点不动. 于是 X 也是 ϕ 的不动点. $\square$

命题 2.6 如果仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 有四个不共面的不动点 A, B, C 和 D , 则 ϕ 必为恒同变换.

证明 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 和 Σ_4 为 $\{A, B, C, D\}$ 四点所构成的四面体的四个面. 因为每个面均有 ϕ 的三个不共线的不动点, 所有四个面上的所有点为 ϕ 的不动点. 现设 X 是空间中的任意一点, 则过 X 的直线 l 至少与四面体的面交于两点 P 和 Q . 由于 P 和 Q 是 ϕ 的不动点, 由命题 2.3 知, l 上的所有点均是 ϕ 的不动点. 故 X 是 ϕ 的不动点. $\square$

定理 2.4 任给空间中两组不共面的四点 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$, 存在唯一一个仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得

$$\phi(A) = A', \quad \phi(B) = B', \quad \phi(C) = C', \quad \phi(D) = D'.$$

证明 先证存在性. 设 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$ 是两组不共面的四点. 则 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ 是空间中不共面的向量. 于是, 对任何 $P \in \mathbb{E}^3$, 存在唯一实数 x, y 和 z , 使得

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}. \quad (2.2.1)$$

我们定义 $\phi(P) \in \mathbb{E}^3$ 是满足以下方程的唯一一点:

$$\overrightarrow{A'\phi(P)} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} + z\overrightarrow{A'D'}. \quad (2.2.2)$$

任给 $P' \in \mathbb{E}^3$, 存在唯一 (x, y, z) 满足

$$\overrightarrow{A'P'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} + z\overrightarrow{A'D'}. \quad (2.2.3)$$

将此 (x, y, z) 代入 (2.2.1) 右边, 则存在唯一 $P \in \mathbb{E}^3$ 满足 (2.2.1). 由 $\phi(P)$ 的定义和 (2.2.3) 我们得到 $\phi(P) = P'$. 故 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个空间变换. 因为 A 点对应 (2.2.1) 中的 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, 由 (2.2.2) 知 $\overrightarrow{A'\phi(A)} = \mathbf{0}$, 故 $\phi(A) = A'$. 因为 B 对应 (2.2.1) 中的 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, 由 (2.2.2) 知 $\overrightarrow{A'\phi(B)} = \overrightarrow{A'B'}$, 故 $\phi(B) = B'$. 同理得到 $\phi(C) = C'$ 和 $\phi(D) = D'$. 这样, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个空间变换, 它将 $\{A, B, C, D\}$ 分别映成 $\{A', B', C', D'\}$.

以下还需证明: $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 将共线三点映成共线的三点. 设 P, Q 和 R 是共线的三点. 则存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得

$$\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AP} + (1-t)\overrightarrow{AQ}.$$

现设

$$\overrightarrow{AP} = x_1\overrightarrow{AB} + y_1\overrightarrow{AC} + z_1\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AQ} = x_2\overrightarrow{AB} + y_2\overrightarrow{AC} + z_2\overrightarrow{AD}.$$

则有

$$\overrightarrow{AR} = (tx_1 + (1-t)x_2)\overrightarrow{AB} + (ty_1 + (1-t)y_2)\overrightarrow{AC} + (tz_1 + (1-t)z_2)\overrightarrow{AD}.$$

由定义得到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'\phi(R)} &= (tx_1 + (1-t)x_2)\overrightarrow{A'B'} + (ty_1 + (1-t)y_2)\overrightarrow{A'C'} + (tz_1 + (1-t)z_2)\overrightarrow{A'C'} \\ &= t(x_1\overrightarrow{A'B'} + y_1\overrightarrow{A'C'} + z_1\overrightarrow{A'C'}) + (1-t)(x_1\overrightarrow{A'B'} + y_1\overrightarrow{A'C'} + z_1\overrightarrow{A'C'}) \\ &= t\overrightarrow{A'\phi(P)} + (1-t)\overrightarrow{A'\phi(Q)}.\end{aligned}$$

故 $\phi(P)$, $\phi(Q)$ 和 $\phi(R)$ 也共线.

以下证明唯一性. 如果 $\psi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换, 它也将 $\{A, B, C, D\}$ 分别映成 $\{A', B', C', D'\}$. 令 $\sigma = \psi \circ \phi^{-1}: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$. 则 σ 是一个仿射变换, 它以不共面的四点 $\{A, B, C, D\}$ 为不动点. 由命题 2.5 知, σ 为恒同映射. 故 $\psi = \phi$, 唯一性成立. $\square$

参照定理 2.4 的证明, 容易得到

定理 2.5 任给平面 Σ 和 Σ' 上不共线的三点 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$, 存在唯一一个仿射映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, 使得

$$\phi(A) = A', \quad \phi(B) = B', \quad \phi(C) = C'.$$

定义 2.5 设 M 和 M' 是平面 (或空间) 中的两个图形. 如果存在平面 (或空间) 的仿射变换 ϕ , 使得 $\phi(M) = M'$, 我们称图形 M 和 M' 是仿射等价的.

推论 2.2

- (1) 平面上任意两个三角形仿射等价;
- (2) 空间中任意两个四面体仿射等价.

定义 2.6 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换, 它诱导向量空间的线性映射 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. 任取 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 我们定义仿射变换 ϕ 的仿射常数 $C(\phi)$ 为

$$C(\phi) = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]}.$$

定理 2.6 仿射变换 ϕ 的仿射常数 $C(\phi)$ 的与 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取无关, 并对任何两个仿射变换 $\phi, \psi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 有 $C(\phi \circ \psi) = C(\phi)C(\psi)$.

证明 设 $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是向量空间的另一组基. 则存在实数 $\{a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq 3\}$ 使得

$$e'_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$e'_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$e'_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3.$$

因为 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 为线性变换, 所以有

$$\phi(e'_1) = a_1 \phi(e_1) + a_2 \phi(e_2) + a_3 \phi(e_3),$$

$$\phi(e'_2) = b_1 \phi(e_1) + b_2 \phi(e_2) + b_3 \phi(e_3),$$

$$\phi(e'_3) = c_1 \phi(e_1) + c_2 \phi(e_2) + c_3 \phi(e_3).$$

由向量体积的性质直接计算, 得到

$$[e'_1, e'_2, e'_3] = [e_1, e_2, e_3] \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$[\phi(e'_1), \phi(e'_2), \phi(e'_3)] = [\phi(e'_1), \phi(e'_2), \phi(e'_3)] \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

于是, 有

$$\frac{[\phi(e'_1), \phi(e'_2), \phi(e'_3)]}{[e'_1, e'_2, e'_3]} = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]}.$$

故仿射常数 $C(\phi)$ 的与 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取无关.

令 $\{e'_1, e'_2, e'_3\} = \{\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)\}$, 则有

$$\begin{aligned} C(\phi \circ \psi) &= \frac{[\phi(\psi(e_1)), \phi(\psi(e_2)), \phi(\psi(e_3))]}{[\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)]} \\ &= \frac{[\phi(e'_1), \phi(e'_2), \phi(e'_3)]}{[e'_1, e'_2, e'_3]} \cdot \frac{[\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]} = C(\phi)C(\psi). \quad \square \end{aligned}$$

以下我们给出仿射常数 $C(\phi)$ 的几何意义. 由定义和向量体积的几何意义知, $C(\phi) > 0$ 当且仅当 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个保定向的变换, 即它将右手系标架映成右手系标架; 而 $C(\phi) < 0$ 当且仅当 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个反定向的变换, 即它将右手系标架映成左手系标架. 以下我们解释 $|C(\phi)|$ 的含义.

设仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 将空间中一个封闭的容器 S 映成另一个封闭的容器 $S' = \phi(S)$ (参见图 2-2).

图 2-2

为了计算容器 S 的体积, 我们取许多长度为 $1/n$ 的小方块 c_n 尽可能地叠放到容器中, 直到放不下为止. 这时, 所有小方块的体积总和 V_n 与容器 S 的体积 V 将非常接近. 更准确地说, 我们可以使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = V$. 因为仿射变换 ϕ 将 S 中的每个小方块 c_n 映成容器 S' 中的小平行六面体 $c'_n = \phi(c_n)$. 设小方块 c_n 是由三个向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 所构成的, 则 c'_n 是由向量 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 所构成的. 因为

$$|C(\phi)| = \frac{|[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]|}{|[e_1, e_2, e_3]|},$$

所以 c'_n 的体积和 c_n 之间的体积比为仿射常数 $|C(\phi)|$, 即 $|c'_n| = |C(\phi)||c_n|$. 故容器 S' 中所有小平行六面体的体积总和 $V'_n = |C(\phi)|V_n$. 这样容器 S' 的体积 $V' = |C(\phi)|V$. 于是, 我们证明了以下的

定理 2.7 设仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 将空间中的一个容器 S 映成另一个容器 S' , 则 S' 与 S 的体积比 V'/V 是常数 $|C(\phi)|$, 它与容器 S 的选取无关.

习题 II-2

1. 平面上两组共线三点 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$ 仿射等价, 当且仅当 $(A, B; C) = (A', B'; C')$.

1. 设 Σ 和 Σ' 是空间中的两张平面. 如果 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个一一对应, 它将 Σ 中的直线映成 Σ' 中的直线, 我们就称 ϕ 为平面 Σ 到平面 Σ' 的仿射映射. 证明: 任给平面 Σ 上的不共线三点 $\{A, B, C\}$ 和 Σ' 上的不共线三点 $\{A', B', C'\}$, 存在唯一仿射映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$ 和 $\phi(C) = C'$.

1. 设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是平面上的一个仿射变换. 任取向量空间 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 使得 $\{e_1, e_2\}$ 落在平面上. 我们定义平面仿射变换 ϕ 的仿射常数为

$$C(\phi) = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), e_3]}{[e_1, e_2, e_3]}.$$

证明: $C(\phi)$ 的定义与这种基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的选取无关, 并对任何两个平面仿射变换 $\phi, \psi: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 有 $C(\phi \circ \psi) = C(\phi)C(\psi)$.

1. 设平面仿射变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 将平面上的一个有限区域 D 映成另一个有限区域 D' , 则 D' 与 D 的面积比 $|D'|/|D|$ 是常数 $|C(\phi)|$, 它与有限区域 D 无关.

§3 仿射变换和等距变换的坐标表示

3.1 仿射变换的坐标表示

定义 3.1 设 O 是空间中的一点, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 我们称 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系 (仿射框架).

定理 3.1 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换, 则 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是空间的一个仿射坐标系; 反之, 任给空间中的两个仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$, 存在唯一的仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 它将 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 映成 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$.

证明 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个仿射坐标系, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换. 由于 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基, 故 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是空间的一个仿射坐标系.

反之, 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 为空间中的两个仿射坐标系. 则存在唯一两组不共面的四点 $\{O, A, B, C\}$ 和 $\{O', A', B', C'\}$, 使得

$$e_1 = \overrightarrow{OA}, \quad e_2 = \overrightarrow{OB}, \quad e_3 = \overrightarrow{OC}, \quad e'_1 = \overrightarrow{O'A'}, \quad e'_2 = \overrightarrow{O'B'}, \quad e'_3 = \overrightarrow{O'C'}.$$

由定理 2.4 知, 存在唯一仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 它将 $\{O, A, B, C\}$ 分别映成 $\{O', A', B', C'\}$. 故有

$$\phi(O) = O', \quad \phi(e_1) = e'_1, \quad \phi(e_2) = e'_2, \quad \phi(e_3) = e'_3. \quad \square$$

我们在空间中取定一个坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 则任给 $P \in \mathbb{E}^3$, 存在唯一的三元数组 (x, y, z) , 使得

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

我们称 (x, y, z) 为 P 点在坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标. 显然, 空间中的点和点的坐标是一一对应的.

设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个仿射变换. 则它诱导向量空间的线性变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. 因为 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是 $\mathbb{V}$ 的一组基, 我们可以找到实数 $\{a_{ij}\}$, 使得

$$\phi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3;$$

$$\phi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3;$$

$$\phi(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.$$

为了方便起见, 我们将上式写成矩阵的乘积形式:

$$(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

设 $\phi(O)$ 对应的坐标为 (c_1, c_2, c_3) . 任取一点 P , 它的坐标为 (x, y, z) . 我们记 $\phi(P)$ 的坐标为 (x', y', z') . 则有

$$\overrightarrow{O\phi(P)} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O\phi(O)} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

由于 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 为线性变换, 我们有

$$\begin{aligned} \phi(\overrightarrow{OP}) &= \phi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) + z\phi(e_3) \\ &= (\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为

$$\overrightarrow{O\phi(P)} = \overrightarrow{\phi(O)\phi(P)} + \overrightarrow{O\phi(O)} = \phi(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{O\phi(O)},$$

通过比较 e_1, e_2 和 e_3 的系数, 我们得到

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

于是, 仿射变换 ϕ 将坐标为 (x, y, z) 的点映成坐标为 (x', y', z') 的点, (3.2) 给出这两个坐标之间的关系式. 我们称 (3.1.2) 为仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 在仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标表示.

我们记

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \phi(X) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

由 (3.1) 知,

$$[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)] = [e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [e_1, e_2, e_3]|A|,$$

其中 $|A|$ 是矩阵 A 的行列式. 由此推出, 仿射变换 ϕ 的体积比为

$$C(\phi) = \frac{[\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)]}{[e_1, e_2, e_3]} = |A|.$$

因为仿射变换的体积比 $C(\phi) \neq 0$, 由矩阵理论知, 矩阵 A 是可逆矩阵. 于是, 仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 在仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下可表成

$$\phi(X) = AX + C,$$

其中 A 是一个可逆矩阵.

反之, 给定一个可逆矩阵 A 和常数组 (c_1, c_2, c_3) , 我们定义映射 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 它将坐标为 X 的点 P , 映成坐标为 $AX + C$ 的点 $\phi(P)$. 对 $\mathbb{E}^3$ 中的任意一点 P' , 它的坐标为 X' , 我们通过解线性方程 $AX + C = X'$, 求得唯一的坐标为 $X = A^{-1}(X' - C)$ 的点 P , 使得 $\phi(P) = P'$. 这样 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一一对应. 现设 $\{P, Q, R\}$ 三点共线, 它们对应的坐标分别是 $\{X, Y, Z\}$. 则存在 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $Z = tX + (1-t)Y$. 因为 $\{\phi(P), \phi(Q), \phi(R)\}$ 的坐标分别是 $X' = AX + C$, $Y' = AY + C$ 和 $Z' = AZ + C$, 所以有

$$\begin{aligned} Z' &= AZ + C = A(tX + (1-t)Y) + C \\ &= t(AX + C) + (1-t)(AY + C) = tX' + (1-t)Y'. \end{aligned}$$

故 $\{\phi(P), \phi(Q), \phi(R)\}$ 也三点共线. 这样, 由坐标映射 $X \rightarrow X' = AX + C$ 给出点的变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 将直线映成直线, 为仿射变换.

综上所述, 我们得到

定理 3.2 取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 则空间中的任何一个仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的行列式非零, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 是常数组, 而 ϕ 将坐标为 (x, y, z) 的点映成坐标为 (x', y', z') 的点.

定义 3.2 设 O 是平面 Σ 中的一点, $\{e_1, e_2\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}_\Sigma$ 的一组基. 我们称 $\{O; e_1, e_2\}$ 为空间中的一个仿射坐标系 (仿射标架).

由定理 2.5 我们可以得到

定理 3.3 设 $\{O; e_1, e_2\}$ 为空间中的一个仿射坐标系, $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个两个平面间的仿射映射, 则 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2)\}$ 是平面 Σ' 上的一个仿射坐标系; 反之, 任给平面 Σ 和 Σ' 上的两个仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2\}$, 存在唯一的仿射映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, 它将 $\{O; e_1, e_2\}$ 映成 $\{O'; e'_1, e'_2\}$.

取定平面 Σ 上的一个仿射坐标系. 则给 $P \in \mathbb{E}^3$, 存在唯一的数对 (x, y) , 使得

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

我们称 (x, y) 为 P 点在坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 下的坐标. 显然, 平面 Σ 中的点和点的坐标是一一对应的. 同理可证,

定理 3.4 在平面 Σ 上取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$. 则任何一个仿射变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的行列式非零, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 是一个常数组.

3.2 等距变换的坐标表示

定义 3.3 设 O 是空间中一点, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个单位正交标架. 我们称 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个单位正交坐标系.

由定义知, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是单位正交标架当且仅当

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3) = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中, 等式左边可以理解为 3×1 矩阵和 1×3 矩阵的乘积, 只是元素 e_i 和 e_j 之间的乘积为内积而已.

设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换. 因为 ϕ 将直线映成直线, 所以 ϕ 也是一个仿射变换, 它诱导向量空间的一个线性变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

定理 3.5 设 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换. 则它诱导的线性变换 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 使得对应任何 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$, 有

$$|\phi(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|, \quad \phi(\mathbf{a}) \cdot \phi(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

证明 由于 ϕ 保持 $\mathbb{E}^3$ 中任意两点的距离不变, 故对任何 $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}$ 有

$$|\phi(\mathbf{a})| = |\phi(\overrightarrow{PQ})| = |\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}| = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\mathbf{a}|.$$

由 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 的线性性得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}) \cdot \phi(\mathbf{b}) &= \frac{1}{4}(|\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b})|^2 - |\phi(\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2) \\ &= \frac{1}{4}(|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 3.6 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个单位正交标架, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换, 则 $\{\phi(O); \phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是空间的一个单位正交标架; 反之, 任给空间中的两个单位正交标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$, 存在唯一的等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 它将 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 映成 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$.

证明 由定理 3.5 知, 如果 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的一个单位正交标架, 则 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是一个单位正交标架.

反之, 由定理 3.1 知, 任给空间中的两个单位正交标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$, 存在唯一一个仿射变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, 使得

$$\phi(O) = O', \quad \phi(e_1) = e'_1, \quad \phi(e_2) = e'_2, \quad \phi(e_3) = e'_3.$$

以下证明 ϕ 是一个等距变换. 任取 $P, Q \in \mathbb{E}^3$, 记 $\overrightarrow{PQ} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, 则由 $\phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ 的线性性得到

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) = xe'_1 + ye'_2 + ze'_3.$$

因为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 均为单位正交标架, 故有

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = |\phi(\overrightarrow{PQ})| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\overrightarrow{PQ}| = d(P, Q).$$

这样, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为等距变换. $\square$

现设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间中一个单位正交标架, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是一个等距变换. 则 $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也是一个单位正交标架. 我们记

$$(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)A,$$

其中 A 是一个 3×3 矩阵. 通过对上述矩阵乘积作转置运算, 得到

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \phi(e_2) \\ \phi(e_3) \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中, A' 是 A 的转置矩阵. 于是, $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$ 也为单位正交基, 当且仅当

$$I = \begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \phi(e_2) \\ \phi(e_3) \end{pmatrix} \cdot (\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)) = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)A = A'IA = A'A.$$

这样 A 是满足 $A'A = I$ 的矩阵, 称为 **正交矩阵**. 由 $A'A = I$, 推出 $A' = A^{-1}$, 进而得到 $AA' = I$.

由以上讨论和定理 3.2, 我们得到

定理 3.7 取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 则空间中的任何一个等距变换 $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 是常数组, 而 ϕ

将坐标为 (x, y, z) 的点映成坐标为 (x', y', z') 的点.

通常, 我们称 $O(3) = \{A \mid AA' = I\}$ 为 3 阶正交群, 称 $SO(3) = \{A \mid AA' = I, |A| = 1\}$ 为 3 阶旋转群.

定义 3.4 设 O 是平面 Σ 上一点, $\{e_1, e_2\}$ 是平面上相互正交的两个向量. 我们称 $\{O; e_1, e_2\}$ 为平面上的一个单位正交标架.

设 Σ 为平面. 在平面上取定单位正交坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$. 同样我们可以证明: 空间中的任何一个等距变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 可唯一表成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是一个 2 阶正交矩阵, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 是一个常数组.

由于 A 满足 $AA' = I$, 我们有

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0. \quad (3.2.1)$$

取实数 θ 使得 $(a_{11}, a_{12}) = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则由 (3.2.1) 可得到 $(a_{21}, a_{22}) = (-\sin \theta, \cos \theta)$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$. 故有

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\varepsilon \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = |A| = \pm 1. \quad (3.2.2)$$

这样我们有

定理 3.8 设 Σ 为平面. 在平面上取定单位正交坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$. 则平面上的每个等距变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\varepsilon \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

其中 $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) 表示 ϕ 是保定向 (反定向) 的等距变换, θ 是 $\phi(e_1)$ 和 e_1 之间的夹角, 而 ϕ 将坐标为 (x, y) 的点映成坐标为 (x', y') 的点.

习题 II-3

1. 设 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 分别为两平面 Σ 和 Σ' 上两个单位正交标架. 证明: 存在唯一的等距映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 它将 $\{O; e_1, e_2\}$ 映成 $\{O'; e'_1, e'_2\}$.

第三章 空间解析几何

§1 平面与直线

1.1 坐标与方程

在空间中取定右手系的单位正交标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 设 P 为空间中一点, 我们称 $\overrightarrow{OP}$ 为 P 点的位置向量. 通过向量分解 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, 空间的每个点 P 均唯一对应它的坐标 (x, y, z) . 通常, 我们将点 P 和它的坐标 (x, y, z) 等同起来, 记为 $P = (x, y, z)$.

定义 1.1 我们称过 O 点且平行于 e_1, e_2, e_3 的直线分别为 x -轴, y -轴, z -轴, 统称为坐标轴; 称向量 e_1, e_2, e_3 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向; 称 $\{O; e_1, e_2\}$ 生成的平面为 xy 平面; 称 $\{O; e_2, e_3\}$ 生成的平面为 yz 平面; 称 $\{O; e_1, e_3\}$ 生成的平面为 xz 平面. 这三个平面统称为坐标平面.

如图 1.1, 三个坐标平面将空间分割成八个区域. 每个区域称为一个卦限. 满足 $z > 0$ 的卦限有四个, 依照 xy 平面四个区域的传统顺序分别为卦限 I, II, III, IV; 满足 $z < 0$ 的卦限有四个, 依照 xy 平面四个区域的传统顺序分别为卦限 V, VI, VII, VIII.

图 1.1

向量空间 $\mathbb{V}$ 中的每个向量 $\mathbf{a}$ 均可唯一表示成 $\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. 我们将 $\mathbf{a}$ 和它在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标 (a_1, a_2, a_3) 等同起来, 记为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. 于是,

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 和 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 为空间中的三个向量. 因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架, 则向量内积,

外积和体积公式分别为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3; \quad (1.1.1)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right); \quad (1.1.2)$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1.1.3)$$

通常, 空间中的图形可以通过图形中点的坐标所满足的方程来刻画. 例如: 中心在 (x_0, y_0, z_0) 点, 半径为 r 的球面是由满足方程

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0 \quad (1.1.4)$$

的点 (x, y, z) 所构成. 以 z -轴为轴心半径为 r 的圆柱面则是由满足方程

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (1.1.5)$$

的点 (x, y, z) 所构成. 我们称方程 (1.1.4) 为球面方程, 称 (1.1.5) 为柱面方程.

一般地, 一张曲面上所有的点可以用一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 的所有解来表示. 我们称 $F(x, y, z) = 0$ 为这张曲面的方程. 空间中的一条曲线则可以用两个联立的方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 来表示, 它可视为曲面 $F(x, y, z) = 0$ 和曲面 $G(x, y, z) = 0$ 的交线.

此外, 曲面还可以用两个参数的参数方程来表示. 例如, 方程 (1.1.4) 所代表的球面可以用以下的参数方程来表示:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \cos \varphi \\ y = y_0 + r \sin \theta \cos \varphi \\ z = z_0 + r \sin \varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]; \quad (1.1.6)$$

而方程 (1.1.5) 所代表的柱面可以用以下的参数方程来表示:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.7)$$

我们称 (1.1.6) 和 (1.1.7) 中的 θ 和 φ 称为曲面的两个参数.

空间中一条曲线可以用一个参数的参数方程来表示:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in (a, b), \quad (1.1.8)$$

其中 $f(t)$, $g(t)$ 和 $h(t)$ 为某个区间 (a, b) 上的连续函数. 例如, 圆柱面 (1.1.5) 上的一条螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1.9)$$

其中 c 为非零常数. 几何上, 当我们将一个三角形缠绕在圆柱面时, 三角形的边在圆柱面上所形成的曲线就是一条螺旋线 (仅在特殊情况下为圆周).

1.2 平面与直线的方程

命题 1.1 空间中的平面所对应的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 A, B, C, D 为常数, 且 $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq \mathbf{0}$.

证明 设 Σ 为平面. 取非零向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 垂直于 Σ . 在 Σ 上取定一点 $Q = (x_0, y_0, z_0)$. 则 Σ 上的任意一点 $P = (x, y, z)$ 满足方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, 则平面 Σ 上的所有点满足方程 $Ax + By + Cz + D = 0$. 反之, 给定方程 $Ax + By + Cz = D$, 其中 $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq \mathbf{0}$. 则存在 $Q = (x_0, y_0, z_0)$ 满足 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$. 则方程 $Ax + By + Cz = D$ 的任意解 $P = (x, y, z)$ 满足

$$\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + (D - D) = 0.$$

记 Σ 为过 Q 点且与 $\mathbf{n}$ 垂直的唯一平面. 则方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的所有解落在平面 Σ 上. $\square$

推论 1.1 在平面方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 中, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 代表平面的一个法向量.

设 Σ 为平面. 在 Σ 上取定一点 $Q = (x_0, y_0, z_0)$ 和一组平行于 Σ 的不共线向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. 则空间中一点 $P =$

(x, y, z) 落在 Σ 上当且仅当存在实数 u, v 使得 $\overrightarrow{QP} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. 由于向量 $\overrightarrow{QP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 故平面 Σ 上点 (x, y, z) 所满足的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

因为 $\overrightarrow{QP} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ 当且仅当 $[\overrightarrow{QP}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$, 所以平面 Σ 的方程也可以写成

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2.2)$$

命题 1.2 设 $Ax + By + Cz + D = 0$ 和 $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ 分别是平面 Σ 和 Σ' 的方程. 则

- (1) 两平面重合 $\Leftrightarrow A/A' = B/B' = C/C' = D/D'$;
- (2) 两平面平行且不重合 $\Leftrightarrow A/A' = B/B' = C/C' \neq D/D'$;
- (3) 两平面相交 $\Leftrightarrow \mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$ 不平行;
- (4) 两平面垂直 $\Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

证明 由推论 1.1 知, 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 和 $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ 的法向量分别为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$. 这两个平面平行当且仅当法向量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 平行, 即当且仅当 $A/A' = B/B' = C/C' = \lambda$. 这时两平面的方程分别为 $Ax + By + Cz + D = 0$ 和 $Ax + By + Cz + \lambda D' = 0$. 这两个平面重合当且仅当这两个方程有共同解, 也就是 $D = \lambda D'$. 这两个平面平行且不重合当且仅当这两个方程没有共同解, 即 $D \neq \lambda D'$. 故 (1) 和 (2) 成立. 显然, 两平面不平行当且仅当它们的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$ 不平行. 故 (3) 成立. 特别是, 两平面垂直当且仅当它们的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$ 垂直, 即 $AA' + BB' + CC' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$. 故 (4) 成立. $\square$

空间中一条直线由直线上一点和直线的方向向量所唯一确定. 设 $Q = (x_0, y_0, z_0)$ 是空间中的一点, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 为非零向量. 记 l 是过 Q 并以 $\mathbf{a}$ 为方向向量的直线. 则 l 上的任意点 $P = (x, y, z)$ 满足

$\overrightarrow{QP} = t\mathbf{a}$, 其中 t 为实数. 于是, 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.3)$$

从直线的参数方程 (1.2.3) 中消去 t , 得到

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (1.2.4)$$

我们称 (1.2.4) 为直线的标准方程.

空间中一条直线也可以视为两个相交平面的交线, 它的方程可表为

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0' \end{cases}, \quad (1.2.5)$$

其中平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 和 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$ 不平行. 这时, 交线的方向向量 $\mathbf{a}$ 同时与 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 垂直. 故可取

$$\mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}' = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right). \quad (1.2.6)$$

由于 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 和 $\mathbf{n}' = (A', B', C')$ 不平行, 方程 (1.2.5) 有解 (x_0, y_0, z_0) . 由此我们容易得到交线的参数方程和标准方程.

命题 1.3 设直线 l 过点 P , 方向向量为 $\mathbf{a}$; 直线 l' 过点 Q , 方向向量为 $\mathbf{a}'$. 则

- (1) l 平行于 $l' \Leftrightarrow \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 平行;
- (2) l 与 l' 重合 $\Leftrightarrow$ 三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ 和 $\overrightarrow{PQ}$ 相互平行;
- (3) l 与 l' 平行且不相交 $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行, 但 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行;
- (4) l 与 l' 相交于一点 $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 不共线, 且 $[\overrightarrow{PQ}, \mathbf{a}, \mathbf{a}'] = 0$;
- (5) l 与 l' 既不相交也不平行 (称为异面直线) $\Leftrightarrow [\overrightarrow{PQ}, \mathbf{a}, \mathbf{a}'] \neq 0$;

证明 两直线 l 与 l' 平行当且仅当它们的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 平行. 两直线重合当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行, 并且 P 和 Q 落在同一直线上, 即 $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ 也平行. 故 (1) 和 (2) 成立. 两直线 l 与 l' 平行且不相交当且

仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 平行, 而 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行, 故 (3) 成立. 两直线 l 与 l' 相交于一点当且仅当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不平行, 并且 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 共面, 即 $[\overrightarrow{PQ}, \mathbf{a}, \mathbf{a}'] = 0$, 故 (4) 成立. 两直线 l 与 l' 为异面直线, 则 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不共面 (否则 l 与 l' 必相交或平行). 故 $[\overrightarrow{PQ}, \mathbf{a}, \mathbf{a}'] \neq 0$, (5) 成立. $\square$

1.3 平面与直线的位置关系

命题 1.4 设平面 Σ 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 直线 l 过点 $P = (x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. 则

- (1) l 平行于 $\Sigma \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$;
- (2) l 落在 Σ 上 $\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$, 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;
- (3) l 与 Σ 不相交 $\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$, 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
- (4) l 与 Σ 相交于一点 $\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$;
- (5) l 与 Σ 垂直 $\Leftrightarrow \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 平行.

证明 直线 l 与平面 Σ 平行当且仅当直线的方向向量 $\mathbf{a}$ 与平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 垂直, 即 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$. 这时, l 落在 Σ 上当且仅当 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 落在 Σ 上, 即 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 故 (1) 和 (2) 成立. 直线 l 与平面 Σ 不相交, 则平行, 且 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 不落在 Σ 上. 故有 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$, 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, (3) 成立. 直线 l 与平面 Σ 相交于一点当且仅当 l 与 Σ 不平行, 即 l 的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 Σ 的法向量 $\mathbf{n}$ 不垂直. 故 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$, (4) 成立. 直线 l 与平面 Σ 垂直当且仅当直线的方向向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与平面法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 平行. $\square$

图 1.2

图 1.3

例 1.1 设平面 Σ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 设 $Q=(x_0, y_0, z_0)$ 为空间中一点. 过 Q 引平面 Σ 的垂线, 垂足为 $P=(x_1, y_1, z_1)$ (参见图 1.2). 则有 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$. 记 $\mathbf{n}=(A, B, C)$ 为 Σ 的法向量. 则 Q 到平面 Σ 的距离 $d=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|/|\mathbf{n}|$. 因为

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = (Ax_1+By_1+Cz_1) - (Ax_0+By_0+Cz_0) = -(Ax_0+By_0+Cz_0+D),$$

所以有距离公式

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (1.3.1)$$

例 1.2 设直线 l 过 $P=(\lambda, \mu, \nu)$, 并以 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 为方向向量. 设 $Q=(x, y, z)$ 为空间中一点. 过 Q 引直线 l 的垂线, 垂足为 P' (参见图 1.3). 则有 $\overrightarrow{P'P} \parallel \mathbf{a}$. 故 Q 到直线 l 的最短距离

$$d = |\overrightarrow{P'Q}| = \frac{|\overrightarrow{P'Q} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ}) \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}.$$

于是有距离公式

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x-\lambda & y-\mu \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y-\mu & z-\nu \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-\lambda & z-\nu \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \quad (1.3.2)$$

图 1.4

例 1.3 设 l 和 l' 是异面直线, 分别过 $P=(x, y, z)$ 和 $P'=(x', y', z')$ 点, 它们的方向向量分别为 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 和 $\mathbf{a}'=(a'_1, a'_2, a'_3)$. 因为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 不共线, 所以 $\mathbf{n}=\mathbf{a} \times \mathbf{a}'$ 分别和两直线 l 和 l' 垂直. 过直线 l' 并以 $\mathbf{n}$ 为法向量作平面 Σ' . 由于直线 l 的方向向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 故 l 平

行于平面 Σ' . 过直线 l 作平面 Σ 与平面 Σ' 垂直, 记 l'' 为 Σ 与 Σ' 的交线. 则两直线 l'' 与 l' 交于一点 Q' . 过 Q' 点作平面 Σ' 的法线, 交直线为 Q (参见图 1.4). 则线段 $\overrightarrow{QQ'}$ 同时与两直线 l 和 l' 垂直, 称为两直线的公垂线段. 这时, 两直线 l 和 l' 之间的最短距离

$$d = |\overrightarrow{QQ'}| = \frac{|\overrightarrow{QQ'} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

因为 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'}$, $\overrightarrow{PQ} \parallel \mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{Q'P'} \parallel \mathbf{a}'$, 且 $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a}'$, 故有 $\overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{QQ'} \cdot \mathbf{n}$. 于是有

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP'} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \mathbf{a}, \mathbf{a}']|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'|}.$$

代入坐标计算, 得到两直线间的距离公式

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} x - x' & a_1 & a'_1 \\ y - y' & a_2 & a'_2 \\ z - z' & a_3 & a'_3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a'_1 \\ a_2 & a'_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a'_2 \\ a_3 & a'_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a'_3 \\ a_1 & a'_1 \end{vmatrix}^2}}. \quad (1.3.3)$$

定义 1.2 设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 分别是两直线 l 和 l' 的方向向量. 我们称 $\theta = \arccos(|\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle|)$ 为两直线间的夹角. 几何上, 通过平移 l' 可使它与直线 l 相交, 则 θ 恰为这两相交直线交角中的那个夹角 (参见图 1.5).

图 1.5

图 1.6

定义 1.3 设直线 l 和平面 Σ 交于一点 P . 记 $\mathbf{a}$ 为 l 的方向向量, $\mathbf{n}$ 是 Σ 的法向量. 我们称 $\theta = \arccos(|\sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle|)$ 为直线 l 与平面 Σ

的夹角. 几何上, 将直线 l 沿法向量 $\mathbf{n}$ 投影到平面 Σ 上, 得到直线 l' . 则 l 和 Σ 之间的夹角 θ 即为两直线 l 和 l' 之间的夹角 (参见图 1.6).

图 1.7

例 1.4 设 $\mathbb{P}$ 为顶点在单位圆周上的正八面体, 它的六个顶点为 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ (参见图 1.7). 求:

- (1) 点 A_1 到三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面的距离;
- (2) 异面直线 A_1A_3 与 A_2A_6 之间的夹角和距离;
- (3) 直线 A_1A_5 与三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面之间的夹角.

解 令 O 为正八面体的重心. 则 $\{O; \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_6}\}$ 构成右手系的单位正交架. 这时 $A_1 = (-1, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 0)$, $A_3 = (0, -1, 0)$, $A_4 = (0, 1, 0)$, $A_5 = (0, 0, -1)$, $A_6 = (0, 0, 1)$.

(1) 因为 $\overrightarrow{A_3A_2} = (1, 1, 0)$ 和 $\overrightarrow{A_3A_6} = (0, 1, 1)$ 构成三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面 Σ 上两个不共面的向量, 平面的法向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{A_3A_2} \times \overrightarrow{A_3A_6} = (1, -1, 1)$. 故平面 Σ 的方程为 $x - y + z + D = 0$. 将 A_3 点的坐标代入方程, 得到 $D = -1$. 由 (1.3.1) 得到 A_1 到 Σ 的距离 $d = 2/\sqrt{3}$.

(2) 直线 A_1A_3 的方向向量为 $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_3} = (1, -1, 0)$. 直线 A_2A_6 的方向向量为 $\mathbf{a}' = \overrightarrow{A_2A_6} = (-1, 0, 1)$. 由于 $\cos\langle\mathbf{a}, \mathbf{a}'\rangle = -1/2$, 故两直线夹角 $\theta = \arccos|\cos\langle\mathbf{a}, \mathbf{a}'\rangle| = \pi/3$. 因为 $\overrightarrow{A_1A_2} = (2, 0, 0)$, 所以两直线距离 $d = |[\overrightarrow{A_1A_2}, \mathbf{a}, \mathbf{a}']|/|\mathbf{a} \times \mathbf{a}'| = 2/\sqrt{3}$.

(3) 直线 A_1A_5 的方向向量为 $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_5} = (1, 0, -1)$. 三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面的法向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{A_3A_1} \times \overrightarrow{A_6A_1} = (-1, -1, 1)$. 由于 $\sin\langle\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = |\mathbf{a} \times \mathbf{n}|/|\mathbf{a}||\mathbf{n}| = 1/\sqrt{3}$, 所以直线 A_1A_5 与三角形 $A_1A_3A_6$ 所在平面之间的夹角为 $\arccos 1/\sqrt{3}$. $\square$

习题 III-1

1.

§2 坐标变换

2.1 空间坐标变换

设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是空间中的两个仿射坐标系. 则空间中一点 P 在坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标 (x, y, z) 定义为

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (e_1, e_2, e_3)X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad (2.1.1)$$

而 P 在另一个坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 下的坐标 (x', y', z') 定义为

$$\overrightarrow{O'P} = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)X', \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ 均为向量空间 $\mathbb{V}$ 的基, 故存在可逆矩阵 A 满足

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

我们记

$$\overrightarrow{OO'} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = (e_1, e_2, e_3)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

因为 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{OO'}$, 由以上公式得到

$$(e_1, e_2, e_3)X = (e'_1, e'_2, e'_3)X' + (e_1, e_2, e_3)C = (e_1, e_2, e_3)(AX' + C).$$

由于 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一组基, 则有 $X = AX' + C$ 成立, 故有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

我们称 (2.1.3) 中的矩阵 A 为从坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 的 **过渡矩阵**.

我们记

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

则有新坐标与旧坐标的变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

设 $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)A$ 和 $(e''_1, e''_2, e''_3) = (e'_1, e'_2, e'_3)B$, 则有

$$(e_1, e_2, e_3) = (e'_1, e'_2, e'_3)A^{-1}, \quad (e''_1, e''_2, e''_3) = (e_1, e_2, e_3)AB.$$

于是, 以下的命题成立:

命题 2.1 设 A 是从坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 的过渡矩阵, B 是从坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 到坐标系 $\{O''; e''_1, e''_2, e''_3\}$ 的过渡矩阵. 则 A^{-1} 是从坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 到坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 的过渡矩阵; AB 是从坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 到坐标系 $\{O''; e''_1, e''_2, e''_3\}$ 的过渡矩阵.

命题 2.2 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架, A 是一个三阶矩阵. 令 $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)A$. 则 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵.

证明 因为 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是一个右手系的单位正交标架, 所以有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3) = I, \quad [e_1, e_2, e_3] = 1.$$

由 $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)A$, 我们得到

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} \cdot (e'_1, e'_2, e'_3) = A' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3)A = A'A;$$

$$[e'_1, e'_2, e'_3] = [e_1, e_2, e_3]|A| = |A|.$$

故 $\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵. $\square$

推论 2.1 设空间中一点 P 在两个右手系的单位正交标架下的坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z') . 则坐标变换公式可表成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1.7)$$

其中 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为行列式为 1 的正交矩阵.

2.2 平面坐标变换

设 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 是平面 Σ 上的两个仿射坐标系. 则空间中一点 P 在坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 下的坐标 (x, y) 定义为

$$\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2 = (e_1, e_2)X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad (2.2.1)$$

而 P 在另一个坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 下的坐标 (x', y') 定义为

$$\overrightarrow{O'P} = x'e'_1 + y'e'_2 = (e'_1, e'_2)X', \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

因为 $\{e_1, e_2\}$ 和 $\{e'_1, e'_2\}$ 均为平面 Σ 上两组不共线的向量, 故存在可逆 2 阶矩阵 A 满足

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

我们记

$$\overrightarrow{OO'} = c_1e_1 + c_2e_2 = (e_1, e_2)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

因为 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{OO'}$, 由以上公式得到

$$(e_1, e_2)X = (e'_1, e'_2)X' + (e_1, e_2)C = (e_1, e_2)(AX' + C).$$

由于 $\{e_1, e_2\}$ 是空间的一组基, 则有 $X = AX' + C$ 成立, 故有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

我们称 (2.2.3) 中的矩阵 A 为从坐标系 $\{O; e_1, e_2\}$ 到坐标系 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 的 **过渡矩阵**.

我们记

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

则有新坐标与旧坐标的变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

同空间的情形类似, 我们可以证明

命题 2.3 设 $\{O; e_1, e_2\}$ 是一个右手系的单位正交标架, A 是一个 2 阶矩阵. 令 $(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)A$. 则 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 是右手系的单位正交标架当且仅当 A 为行列式为 1 的正交矩阵.

我们知道, 每个 2 阶正交矩阵可以用第二章的 (3.2.2) 式表出. 因为 $|A| = 1$, 我们得到

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

这样, 我们有

推论 2.2 设平面 Σ 上一点 P 在两个右手系的单位正交标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 下的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y') . 则坐标变换公式可表成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

其中 θ 是向量 e_1 和 e'_1 之间的夹角.

习题 III-2

1.

§3 二次曲线的分类

3.1 圆锥曲线

在平坦的地面 F 点处放置一个直径为 d 的球面. 在球面外高度为 $h > 0$ 的点 Q 处放置一个点光源. 光照射球面并在地面形成一个阴影区域, 它的边界曲线记为 Γ . 从 Q 点发出的光线照亮了球面上一个圆形区域, 它的边界是球面上一个小圆周 γ . γ 所在平面 Σ 与地面有一条交线 l , 称为曲线 Γ 的 **准线**. 我们称 F 为曲线 Γ 的焦点.

图 3.1a

图 3.1b

图 3.1c

当 $h > d$ 时, γ 含有球面的最高点 T 在其内部. 如果光源 Q 在球面的正上方, 则 Γ 为一圆周, 这时准线 l 不存在. 如果光源 Q 在球面的斜上方, 则阴影区域依然是一个有限的区域. 这时我们称 Γ 为 **椭圆**, 称 l 为椭圆 Γ 的准线, 称 T 为椭圆 Γ 的一个焦点 (参见图 3.1a).

当 $h = d$ 时, 球面的最高点 T 落在小圆周 γ 上, 并且光线 QQ' 平行于地面. 这时我们称曲线 Γ 为 **抛物线**, 称 l 为抛物线 Γ 的准线, 称 F 为抛物线 Γ 的焦点 (参见图 3.1b).

当 $h < d$ 时, 球面的最高点 T 落在小圆周 γ 的外部. 这时我们称曲线 Γ 为 **双曲线**, 称 l 为双曲线 Γ 的准线, 称 F 为双曲线 Γ 的一个焦点 (参见图 3.1c).

我们注意到, 所有与球面相切的光线构成一个圆锥, 而 Γ 恰是不过圆锥顶点的平面 (即地面) 截这个圆锥而生产的曲线. 于是, 椭圆, 抛物线和双曲线是圆锥与平面的截线, 统称 **圆锥曲线**.

图 3.2

设 α 为这个圆锥的底角, β 为小圆周 γ 所在平面 Σ 与地面的夹角. 过 Q, F 点和球心 O 点作一平面, 交准线于 P' . 记 QE 和 QF 为切线, 切点为 E 和 F . QE 交 TP' 于 G . 过 Q 作地面的垂线 l' . 过 O 引 l' 的垂线, 垂足为 D (参见图 3.2). 则 $\angle GEP' = \alpha$, $\angle EP'G = \beta$. 由此得到 $\angle FGQ = \alpha + \beta$. 因为四边形 $OFGQ$ 的内角和为 2π , 而 $\angle OQG = \pi/2 - \alpha$, 故有 $\angle QOD = \pi/2 - \beta$. 这样, 从直角三角形 ODQ 和 OEQ 我们得到

$$h - \frac{d}{2} = d(Q, D) = d(Q, O) \sin(\pi/2 - \beta), \quad \frac{d}{2} = d(Q, O) \cos \alpha.$$

消去 $d(Q, O)$, 得到

$$\frac{h}{d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (3.1.1)$$

故当 $\alpha > \beta$ 时, $h > d$, 截线为椭圆; $\alpha = \beta$ 时, $h = d$, 截线为抛物线, 这时截平面与圆锥的某条母线平行; $\alpha < \beta$ 时, $h < d$, 截线为双曲线, 它的两个分支分别落在锥面的上下两个部分上.

下面我们研究圆锥曲线的性质.

图 3.3

任取 Γ 上一点 P . 从 P 分别引平面 Σ 和准线 l 的垂线, 垂足为分别为 P^* 和 P' (参见图 3.3). 由于向量 $\overrightarrow{PP^*}$ 与圆锥轴线 QO 平行, 而 QO 与准线 l 垂直, 故 $\overrightarrow{PP^*}$ 也与准线 l 垂直. 又由于直线 PP' 是准线 l 的垂线, 故 P^*P' 也与 l 垂直. 故有

$$\angle P^*PQ = \angle PQO = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \angle P^*P'P = \beta.$$

因为 PT 和 PM 同为 P 点出发的球面的切线, 所以 $d(P, T) = d(P, M)$. 在直角三角形 PP^*M 和 PP^*P' 中, 我们有

$$d(P, P^*) = d(P, M) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = d(P, T) \sin \alpha, \quad d(P, P^*) = d(P, P') \sin \beta.$$

由此得到,

$$\frac{d(P, T)}{d(P, l)} = \frac{d(P, T)}{d(P, P')} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = e$$

是一个与 P 无关的常数. 我们称 e 为圆锥曲线的 **离心率**. 显然, 离心率 $e < 1$ 时为椭圆; 离心率 $e = 1$ 时为抛物线; 离心率 $e > 1$ 时为双曲线. 这样我们证明了

定理 3.1 圆锥曲线上点到它焦点和到它准线的距离比为常数.

图 3.4a

图 3.4b

定理 3.2

- (1) 椭圆上点到两定点的距离和为常数;
- (2) 抛物线上点到一定点的和到一定直线的距离相等;
- (3) 双曲线上点到两定点的距离差为常数.

证明 (1) 设平面 Σ 截圆锥得一椭圆 Γ . 在圆锥被截断的两个部分中各放一个最大的球体. 这两个球体分别与平面 Σ 切于两点 F 和 F' (称为椭圆的焦点), 并分别与圆锥交于两个圆周 γ 和 γ' . 任取 Γ 上的一点 P , 记母线 PQ 与 γ, γ' 的交点为 T 和 T' (参见图 3.4a). 因为球外一点到球面的切线长度相等, 故

$$d(P, F) + d(P, F') = d(P, T) + d(P, T') = d(T, T')$$

为介于两个圆周 γ 和 γ' 之间母线段的长度, 这个长度与 P 无关, 是常数. (2) 是 (3.1.1) 的推论. (3) 设平面 Σ 截圆锥得一双曲线 Γ . 在圆锥上下部分中各放一个最大的球体. 这两个球体分别与平面 Σ 切于两点 F 和 F' (称为双曲线的焦点), 并分别与圆锥交于两个圆周 γ 和 γ' . 任取 Γ 上的一点 P , 记母线 PQ 与 γ, γ' 的交点为 T 和 T' (参见图 3.4b). 因为球外一点到球面的切线长度相等, 故

$$d(P, F') - d(P, F) = d(P, T') - d(P, T) = d(T, T')$$

为介于两个圆周 γ 和 γ' 之间母线段的长度, 这个长度与 P 无关, 是常数. $\square$

下面我们计算圆锥曲线所满足的代数方程.

图 3.5a

图 3.5b

图 3.5c

设 Γ 是平面上一个椭圆, 它的两焦点为 F 和 F' . 如图 3.5a, 我们在平面上建立右手正交坐标系, 使得 $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$. 设 $P = (x, y)$ 为椭圆上任意点. 记 $d(P, F) + d(P, F')$ 为常数 $2a$. 由三角不等式知 $2c = d(F, F') < 2a$. 令 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. 则由

$$d(P, F) + d(P, F') = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

推出

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x. \end{aligned}$$

由此得到椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (3.1.2)$$

设椭圆准线的方程为 $x = p$. 由于椭圆上任意 P 点到焦点 $F = (c, 0)$ 和准线 $x = p$ 的距离比为常数 e , 分别令 $P = (a, 0)$ 及 $P = (-a, 0)$, 我们得到

$$\frac{a+c}{p+a} = \frac{a-c}{p-a} = e.$$

从中得到 $e = c/a$ 和 $p = a^2/c$. 故椭圆 (3.1.2) 的准线方程为 $x = a^2/c$. 同理, 椭圆的另一个焦点 $F' = (-c, 0)$ 对应应有另一条准线 $x = -a^2/c$.

设 Γ 是平面上一个抛物线, 它的焦点为 F , 准线为 F' . 如图 3.5b, 我们在平面上建立右手正交坐标系, 使得 $F = (0, c)$, 准线方程为 $y = -c$.

设 $P = (x, y)$ 为抛物线上任意点. 由于

$$y + c = d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2},$$

我们得到抛物线的标准方程

$$x^2 - 4cy = 0. \quad (3.1.3)$$

设 Γ 是平面上一个双曲线, 它的两焦点为 F 和 F' . 如图 3.5c, 我们在平面上建立右手正交坐标系, 使得 $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$. 设 $P = (x, y)$ 为椭圆上任意点. 记 $|d(P, F) - d(P, F')|$ 为常数 $2a$. 由三角不等式知 $2c = d(F, F') > 2a$. 令 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 则有

$$d(P, F) - d(P, F') = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

由此得到双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (3.1.4)$$

同理求得, 双曲线 (3.1.4) 的离心率 $e = c/a$, 且两个焦点 $F = (c, 0)$ 和 $F' = (-c, 0)$ 所对应的两条准线方程分别为 $x = a^2/c$ 和 $x = -a^2/c$.

3.2 二次曲线的代数不变量

从代数上看, 圆锥曲线的方程 $F(x, y) = 0$ 是一个二次的代数方程. 在上节中, 我们利用圆锥曲线的特殊几何性质来建立右手直角坐标系, 得到了椭圆, 抛物线和双曲线标准方程.

假如我们取了其它的右手直角坐标系, 则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

于是, 圆锥曲线的方程变成

$$F(\cos \theta x' + \sin \theta y' + c_1, -\sin \theta x' + \cos \theta y' + c_2) = 0,$$

它依然是一个二次的方程.

定义 3.1 平面上由一个二次方程

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

所定义的图形 Γ 称为二次曲线, 其中 A, B, C 不全为零.

我们的目的是研究二次曲线 Γ 所有可能的形状. 为了方便研究, 我们将上述方程写成矩阵形式

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.2.2)$$

显然, 当二次曲线 $F(x, y) = 0$ 的所有系数乘上一个非零常数时, 它所定义的图形 Γ 不变. 以下我们试图通过重新选取右手直角坐标系, 使得二次方程得以简化, 并从简化的方程中分析二次曲线的形状. 当我们取新的右手直角坐标系后, 则坐标变换公式 (3.2.1) 可以写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & c_1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

其中 θ 和 c_1, c_2 为待定的常数. 将方程 (3.2.3) 代入方程 (3.2.2), 得到二次曲线 Γ 在新坐标系下的方程

$$(x', y', 1) \begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.2.4)$$

其中

$$\begin{pmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & c_1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

从 (3.2.5) 直接得到

$$A' = A \cos^2 \theta - 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta; \quad (3.2.6)$$

$$C' = A \sin^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta; \quad (3.2.7)$$

$$B' = \frac{1}{2}(B \cos 2\theta + (A - C) \sin 2\theta). \quad (3.2.8)$$

由 (3.2.6), (3.2.7) 和以上两个矩阵方程, 我们得到

$$A' + C' = A + C;$$

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

定义 3.2 设 Γ 是平面上由二次方程

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

定义的二次曲线. 我们定义它的三个代数不变量 I_1, I_2, I_3 分别为

$$I_1 = A + C, \quad I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \quad (3.2.9)$$

因为 A, B, C 不全为零, 所有 I_1, I_2 不全为零.

于是我们有

定理 3.3 平面上二次曲线 Γ 的代数不变量 I_1, I_2 和 I_3 在坐标变换下不变.

3.3 二次曲线的分类

设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

为了研究 Γ 所有可能的形状, 我们试图通过坐标变换, 将上述方程变为最简单的形式.

如果 $B \neq 0$, 我们取 θ 满足

$$\cot 2\theta = -\frac{A - C}{B}.$$

由 (3.2.8) 得 $B' = 0$. 于是, 通过坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

我们总可以将二次曲线的方程简化成

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \quad (3.3.1)$$

的形式. 这时, 我们有 $I_1 = A' + C'$ 和 $I_2 = A'C'$.

我们首先考虑 $I_2 \neq 0$ 的情形. 这时 A', C' 均非零, (3.3.1) 可以写成

$$A'(x' + \frac{D'}{A'})^2 + C'(y' + \frac{E'}{C'})^2 + F' - \frac{D'^2}{A'} - \frac{E'^2}{C'} = 0. \quad (3.3.2)$$

我们再作坐标变换

$$x^* = x' + \frac{D'}{A'}, \quad y^* = y' + \frac{E'}{C'},$$

并令

$$\lambda = A', \quad \mu = C', \quad F^* = F' - \frac{D'^2}{A'} - \frac{E'^2}{C'},$$

得到新方程

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + F^* = 0. \quad (3.3.3)$$

由于不变量 I_1, I_2, I_3 在坐标变换下不变, 由 (3.3.3) 得到

$$I_1 = \lambda + \mu, \quad I_2 = \lambda\mu, \quad I_3 = \lambda\mu F^*.$$

故 λ, μ 是二次方程

$$t^2 - 2I_1 t + I_2 = 0 \quad (3.3.4)$$

的根, 且 $F^* = I_3/I_2$. 这样方程 (3.3.3) 变成

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0. \quad (3.3.5)$$

当 $I_2 < 0$ 时, λ 和 μ 异号. 如果 $I_3 \neq 0$, 由 (3.3.5) 知, 二次曲线为双曲线. 如果 $I_3 = 0$, 则方程 (3.3.5) 变成 $\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} = 0$, 它的图形是由两相交直线

$$\sqrt{|\lambda|}x^* + \sqrt{|\mu|}y^* = 0, \quad \sqrt{|\lambda|}x^* - \sqrt{|\mu|}y^* = 0$$

上的所有点组成.

当 $I_2 > 0$ 时, λ, μ 和 I_1 均同号. 如果 $I_3 \neq 0$, 且与 I_1 异号, 则由 (3.3.5) 知, 二次曲线为椭圆; 如果 $I_3 \neq 0$, 且与 I_1 同号, 则方程 (3.3.5) 无解, 二次曲线是空集. 如果 $I_3 = 0$, 则 (3.3.5) 的解为 $(x^*, y^*) = (0, 0)$, 为平面上一点.

综上所述, 我们得到

定理 3.4 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量, 且 $I_2 \neq 0$. 则

- (1) 当 $I_2 < 0$ 和 $I_3 \neq 0$ 时, Γ 为双曲线;
- (2) 当 $I_2 < 0$ 和 $I_3 = 0$ 时, Γ 为两条相交的直线;
- (3) 当 $I_2 > 0$ 和 $I_1 I_3 < 0$ 时, Γ 为椭圆;
- (4) 当 $I_2 > 0$ 和 $I_1 I_3 > 0$ 时, Γ 为空集;
- (5) 当 $I_2 > 0$ 和 $I_3 = 0$ 时, Γ 为平面上一个点;

下面我们考虑 $I_2 = 0$ 的情形. 由 (3.3.1) 得 $I_2 = A'C' = 0$, 即 $A' = 0$ 或 $C' = 0$. 我们不妨设 $C' = 0$. 这时 $A' \neq 0$. 由 (3.3.1) 我们得到

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \quad (3.3.6)$$

从二次曲线方程 (3.3.6) 计算不变量, 我们得到

$$I_1 = A' \neq 0, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = -A'E'^2. \quad (3.3.7)$$

如果 $I_3 \neq 0$, 则由 (3.3.7) 知 $E' \neq 0$, 并且 I_3 与 I_1 异号. 这时, 方程 (3.3.7) 可以写成

$$A'(x' + \frac{D'}{A'})^2 + 2E'(y' + \frac{F'}{2E'} - \frac{D'^2}{2A'E'}) = 0. \quad (3.3.8)$$

作坐标变换

$$x^* = x' + \frac{D'}{A'}, \quad y^* = y' + \frac{F'}{2E'} - \frac{D'^2}{2A'E'},$$

并将

$$I_1 = A', \quad E' = \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$$

代入方程 (3.3.8), 我们得到

$$I_1 x^{*2} \pm \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} y^* = 0.$$

这时, 二次曲线为抛物线.

如果 $I_3 = 0$, 则由 (3.3.7) 知 $E' = 0$. 这时方程 (3.3.6) 变成

$$A'x'^2 + 2D'x' + F' = 0. \quad (3.3.9)$$

这是一个二次方程, 它的判别式 $\Delta = 4(D'^2 - A'F')$. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程 (3.3.9) 等价于两条平行直线 $x' = \lambda$ 和 $x' = \mu$, 其中 λ, μ 为二次方程的两个不同的实根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程 (3.3.9) 等价于一条直线 $x' = \lambda$, 其中

λ 是二次方程的唯一实根；当 $\Delta < 0$ 时，无解，这时方程 (3.3.9) 的解为空集.

综上所述，我们得到

定理 3.5 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量，且 $I_2 = 0$. 则

- (1) 当 $I_3 \neq 0$ 时， Γ 为抛物线；
- (2) 当 $I_3 = 0$ 时， Γ 为两条平行线，一条直线或空集.

由定理 3.4 和定理 3.5, 我们得到以下的二次曲线分类定理:

定理 3.6 平面上二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

所有可能的形状为：椭圆，双曲线，抛物线，两条直线，一条直线，一点或空集.

利用圆锥曲线的标准方程，定理 3.4 和定理 3.5 我们得到

定理 3.7 设二次曲线 Γ 的方程为

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

I_1, I_2 和 I_3 为 Γ 的代数不变量. 则

- (1) Γ 为椭圆当且仅当 $I_2 > 0$ 和 $I_1 I_3 < 0$;
- (2) Γ 为双曲线当且仅当 $I_2 < 0$ 和 $I_3 \neq 0$;
- (3) Γ 为抛物线当且仅当 $I_2 = 0$ 和 $I_3 \neq 0$.

习题 III-3

1.

§4 二次曲面分类

4.1 二次曲面的例子

例子 4.1 设 l 和 l' 是空间中的两条直线. 如果 l 和 l' 平行，则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为 **圆柱面**(参见图 4.1a); 如果 l 和 l' 相交于一点

O , 则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为以 O 为顶点的 **圆锥面** (参见图 4.1b); 如果 l 和 l' 为互不垂直的异面直线, 则 l' 绕 l 旋转所得到的曲面称为 **单叶双曲面** (参见图 4.1c).

图 4.1a

图 4.1b

图 4.1c

我们以圆柱面的旋转轴 l 为 z 轴建立坐标系. 则圆柱面上一点 (x, y, z) 到旋转轴 l 上的点 $(0, 0, z)$ 的距离为圆柱面的半径 R , 为常数. 故圆柱面的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (4.1.1)$$

我们以圆锥面的顶点为原点, 以旋转轴 l 为 z 轴建立坐标系. 设 $P = (x, y, z)$ 为圆锥面上一点. 则 $P' = (0, 0, z)$ 是 P 点到旋转轴 l 垂直投影的垂足. 令 θ 为圆锥面的中心角. 则在直角三角形 OPP' 中有 $d(P, P') = \tan \theta d(O, P')$. 故圆锥面的方程为

$$x^2 + y^2 - \tan^2 \theta z^2 = 0. \quad (4.1.2)$$

设 l 和 l' 为异面直线, 夹角为 $\theta \neq \pi/2$. 直线 l' 绕 l 旋转得到单叶双曲面 S . 设 O 和 P 分别是 l 和 l' 上的点, 使得线段 $\overline{OP}$ 是公垂线. 记 $R = d(O, P)$. 我们以 O 为原点, l 为 z 轴, 以直线 OP 为 x 轴建立右手直角坐标系. 则 $P = (R, 0, 0)$. 设直线 l' 的方向向量为 $\mathbf{a}$. 则 $\mathbf{a}$ 与 x 轴垂直, 并与 z 轴的交角为 θ . 故可取 $\mathbf{a} = (0, \sin \theta, \cos \theta)$. 设 $Q = (x, y, z)$ 为 S 上任意点, 它是由直线 l' 上的点 $Q' = (x', y', z')$ 绕 z 轴旋转而得到. 于是有

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \quad z = z'. \quad (4.1.3)$$

因为 Q' 落在 l' 上, 所以存在参数 t , 使得 $\overrightarrow{Q'P} = t\mathbf{a}$, 即

$$(x', y', z') = (R, t \sin \theta, t \cos \theta). \quad (4.1.4)$$

将 (4.1.4) 代入方程 (4.1.3), 得到 $x^2 + y^2 = R^2 + t^2 \sin^2 \theta$ 和 $t = z / \cos \theta$. 故单叶双曲面的方程为

$$x^2 + y^2 - \tan^2 \theta z^2 = R^2. \quad (4.1.5)$$

设 P 为单叶双曲面上一点. 由于单叶双曲面是由直线旋转而成, 所以至少有一个直线 l_1 通过 P 点. 设 Σ 是由旋转轴 l 和 P 点张成的平面. 由于平面反射 $\Sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 将旋转面映成自己, 并且将直线映成直线, 所以 l_P 的平面反射象 l'_P 也是单叶双曲面上的一条直线, 并且 l_P 和 l'_P 相交于点 P . 故单叶双曲面上每一点均有两条曲面上的直线通过此点.

例子 4.2 将抛物线 $x^2 = 4cy$ ($c \neq 0$) 绕它的对称轴 (y 轴) 旋转, 得到的曲面称为 **旋转抛物面**. 我们注意到, 如果旋转抛物面上点 (x, y, z) 是由抛物线上的点 $(x', y, 0)$ 旋转而来, 则有 $x^2 + z^2 = x'^2 = 4cy$. 故旋转抛物面的方程为

$$x^2 + z^2 = 4cy. \quad (4.1.6)$$

我们常在手电筒头部看到旋转抛物面. 一个小灯泡被安置在抛物面的焦点 $(0, c, 0)$ 上. 从焦点出发的光线经抛物面反射后形成平行光束 (参见图 4.2a).

图 4.2a

图 4.2b

图 4.2c

例子 4.3 将双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 绕它的主轴 (x 轴) 旋转, 得到的曲面称为 **双叶双曲面** (参见图 4.2b), 它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (4.1.7)$$

如果将 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 绕它的副轴 (y 轴) 旋转, 得到的将是一个单叶双曲面 (参见图 4.2c).

例子 4.4 我们称由方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (4.1.8)$$

给出的图形为 **双曲抛物面 (马鞍面)**(参见图 4.3a).

我们注意到, 对任何参数 $\lambda \neq 0$, 直线 l_λ

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda^{-1}z \end{cases} \quad (4.1.9)$$

的所有解满足 (4.1.8); 直线 l_μ

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu^{-1}z \end{cases} \quad (4.1.10)$$

的所有解满足 (4.1.8). 故直线 l_λ 和 l_μ 落在双曲抛物面上. 当非零实数 λ (或 μ) 变动时, 直线 l_λ (或直线 l_μ) 随着变动, 并描绘出整个双曲抛物面. 对双曲抛物面上任意点 $P = (x_0, y_0, z_0)$, 我们取定 $\lambda = x_0/a - y_0/b$ 和 $\mu = x_0/a + y_0/b$. 则 l_λ 和 l_μ 是双曲抛物面上过 P 点的两条直线.

图 4.3a

图 4.3b

例子 4.5 设 $\mathbb{S}^2$ 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\phi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为仿射变换

$$\phi(x, y, z) = (ax, by, cz). \quad (4.1.11)$$

如果 (x, y, z) 为 $\phi(\mathbb{S}^2)$ 上一点, 则 $(x/a, y/b, z/c) = \phi^{-1}(x, y, z)$ 为单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的点. 故 $\phi(\mathbb{S}^2)$ (参见图 4.3b) 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.1.12)$$

我们称方程 (4.1.12) 所定义的图形的 **椭球面**.

例子 4.6 将这些例子一般化, 我们得到一些特殊曲面, 它们是由以下的二次方程定义的图形:

- (1) 椭球面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$;
- (2) 单叶双曲面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$;
- (3) 双叶双曲面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$;
- (4) 椭圆抛物面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$;
- (5) 双曲抛物面 (马鞍面) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$;
- (6) 椭圆锥面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$;
- (7) 椭圆柱面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
- (8) 双曲柱面 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;
- (9) 抛物柱面 $x^2/a^2 = 2z$.

4.2 二次曲面的分类

我们称由以下一般二次方程定义的图形为 **二次曲面**:

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz \\ + 2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0,$$

其中至少有一个 $A_{ij} \neq 0$. 在这一节中, 我们将对所有可能的二次曲面进行分类.

我们记

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

则有 $X^t = (x, y, z)$, $B^t = (B_1, B_2, B_3)$ 和 $A^t = A$. 这样一般二次曲面的方程可写成

$$(X^t, 1) \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.1)$$

由推论 2.1 可知, 空间两个右手直角坐标系的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

其中 T 为行列式为 1 的正交矩阵, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ 为常数, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 是点 X 在新右手直角坐标系下的坐标.

我们将 (4.2.2) 代入方程 (4.2.1), 得到

$$(X'^t, 1) \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ \mathbf{a}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.3)$$

这样, 我们得到二次曲面在新坐标系下的方程

$$(X'^t, 1) \begin{pmatrix} A' & B' \\ B'^t & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.2.4)$$

其中方程系数满足

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B'^t & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ \mathbf{a}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

特别地, 我们有

$$A' = T^t AT. \quad (4.2.6)$$

定义 4.1 设 S 是一个二次曲面, 它的方程为

$$\begin{aligned} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz \\ + 2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0. \end{aligned}$$

我们定义

$$\begin{aligned} I_1 = A_{11} + A_{22} + A_{33}; \quad I_2 = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{13} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}; \\ I_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}; \quad I_4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & C \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

定理 4.1 I_1, I_2, I_3 和 I_4 在坐标变换下不变.

证明 在坐标变换 (4.2.2) 下我们有变换公式 (4.2.6). 由于两矩阵乘积的行列式等于两矩阵行列式的乘积, 我们得到 $I_4 = I'_4$. 因为对任何实数 t 有公式

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{12} & t - A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & t - A_{33} \end{vmatrix} = t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3. \quad (4.2.7)$$

由 (4.2.6) 知对任何 t 有 $(tI - A') = T^t(tI - A)T$, 故有

$$|tI - A'| = |T^t||tI - A||T| = |tI - A|.$$

由 (4.2.7) 知对任何 t 有

$$t^3 - I'_1 t^2 + I'_2 t - I'_3 = t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3.$$

从而得到

$$I'_1 = I_1, \quad I'_2 = I_2, \quad I'_3 = I_3. \quad \square$$

我们称 I_1, I_2, I_3, I_4 为二次曲面的代数不变量.

以下我们要确定二次曲面所有可能的图形. 为此, 我们希望选择坐标变换公式 (4.2.2) 中的 T 和 $\mathbf{a}$, 使得二次曲面在新坐标系下的方程 (4.2.4) 有最简单的形式.

命题 4.1 存在行列式为 1 的 3 阶正交矩阵 T , 使得

$$T^t AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

证明 由于 A 是一个对称矩阵, 所以对任何向量 X 和 Y 有

$$AX \cdot Y = X \cdot AY. \quad (4.2.8)$$

令 $p(t) = |tI - A|$. 则 $p(t)$ 是一个三次多项式, 它至少有一个实根 λ . 因为 $|\lambda I - A| = p(\lambda) = 0$, 所以存在非零向量 v 使得 $(\lambda I - A)v = 0$. 令 $e_1 = v/|v|$, 则有 $Ae_1 = \lambda e_1$. 取向量 e_2, e_3 , 使得 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为右手系的单位正交基. 因为

$$Ae_1 \cdot e_2 = 0, \quad Ae_1 \cdot e_3 = 0, \quad Ae_2 \cdot e_3 = e_2 \cdot Ae_3,$$

所以存在实数 $\{a, b, c\}$, 使得

$$A(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

如果 $b = 0$, 则令 $T = (e_1, e_2, e_3)$, $a = \mu$ 和 $c = \nu$, 命题成立. 如果 $b \neq 0$, 则令

$$e_2^* = \cos \theta e_2 + \sin \theta e_3, \quad e_3^* = -\sin \theta e_2 + \cos \theta e_3,$$

其中 θ 待定. 这时, 有

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2^*, e_3^*) &= A(e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (e_1, e_2^*, e_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

取 θ 满足方程 $\cot 2\theta = (a - c)/2b$, 则有

$$A(e_1, e_2^*, e_3^*) = (e_1, e_2^*, e_3^*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

其中 μ 和 ν 为实数. 令 $T = (e_1, e_2^*, e_3^*)$, 则命题也成立. $\square$

取命题 4.1 中的 T 作坐标变换 $X = TX'$, 则二次曲面在新坐标系下的方程可写成

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2 + 2B'_1 x' + 2B'_2 y' + 2B'_3 z' + C' = 0. \quad (4.2.8)$$

这时有

$$I_1 = \lambda + \mu + \nu, \quad I_2 = \lambda\mu + \mu\nu + \lambda\nu, \quad I_3 = \lambda\mu\nu, \quad (4.2.9)$$

其中 λ, μ, ν 不全为零.

我们首先考虑 $I_3 = \lambda\mu\nu \neq 0$ 的情形. 这时二次曲面方程可以进一步写成

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + \nu z^{*2} + C^* = 0, \quad (4.2.9)$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B'_1}{\lambda}, \quad y^* = y' + \frac{B'_2}{\mu}, \quad z^* = z' + \frac{B'_3}{\nu}.$$

由 (4.2.9) 得到 $I_4 = C^* I_3$. 如果 λ, μ, ν 同号, 则 I_1, I_3 也与 λ, μ, ν 有相同的符号. 当 $I_4 < 0$ 时, C^* 与 λ, μ, ν 有不同的符号, 这时二次曲面为椭圆面; 当 $I_4 > 0$ 时, C^* 与 λ, μ, ν 有相同的符号, 这时二次曲面为空集; 当 $I_4 = 0$ 时, 二次曲面为一个点. 如果 λ, μ, ν 异号, 我们可不妨设 λ, μ 的符号为 ε , 而 ν 的符号为 $-\varepsilon$. 这时 I_3 的符号为 $-\varepsilon$. 当 $I_4 < 0$ 时, $C^* = I_4/I_3$ 的符号为 ε , 这时二次曲面为单叶双曲面; 当 $I_4 > 0$ 时, $C^* = I_4/I_3$ 的符号为 $-\varepsilon$, 这时二次曲面为双叶双曲面; 当 $I_4 = 0$ 时, $C^* = 0$, 这时二次曲面为椭圆锥面.

其次我们考虑 λ, μ, ν 中恰有一个为零的情形. 我们不妨设 $\nu = 0$, $I_2 = \lambda\mu \neq 0$. 这时有 $I_4 = -I_2 B'^2_3$. 如果 $I_4 \neq 0$, 二次曲面方程 (4.2.8) 可以进一步写成

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + 2B'_3 z^* = 0, \quad (4.2.10)$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B'_1}{\lambda}, \quad y^* = y' + \frac{B'_2}{\mu}, \quad z^* = z' + \left(\frac{C'}{2B'_3} - \frac{B'^2_1}{2\lambda B'_3} - \frac{B'^2_2}{2\mu B'_3} \right).$$

于是, 当 $I_2 > 0$ 时, 二次曲面为椭圆抛物面; 当 $I_2 < 0$ 时, 二次曲面为双曲抛物面. 如果 $I_4 = 0$, 则 $B'_3 = 0$, 这时二次曲面方程 (4.2.8) 可以进一步写成

$$\lambda x^{*2} + \mu y^{*2} + C^* = 0, \quad (4.2.11)$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B'_1}{\lambda}, \quad y^* = y' + \frac{B'_2}{\mu}.$$

于是, 当 $I_2 > 0$ 且 I_1 与 C^* 异号时, 二次曲面为椭圆柱面; 当 $I_2 > 0$ 且 I_1 与 C^* 同号时, 二次曲面为空集; 当 $I_2 > 0$ 且 $C^* = 0$ 时, 二次曲面为直线 $x^* = y^* = 0$ (即 z^* 轴). 当 $I_2 < 0$ 且 $C^* \neq 0$ 时, 二次曲面为双曲柱面; 当 $I_2 < 0$ 且 $C^* = 0$ 时, 二次曲面为两个相交的平面 $\sqrt{|\lambda|}x^* \pm \sqrt{|\mu|}y^* = 0$.

最后我们考虑 λ, μ, ν 中只有一个是非零的情形. 我们不妨设 $I_1 = \lambda \neq 0$ 且 $\mu = \nu = 0$. 这时有 $I_2 = I_3 = I_4 = 0$. 方程 (4.2.8) 可以写成

$$\lambda(x' + \frac{B'_1}{\lambda})^2 + 2B'_2y' + 2B'_3z' + C' - \frac{B_1'^2}{\lambda} = 0. \quad (4.2.12)$$

如果 $B'_2 = B'_3 = 0$, 则方程可进一步写成

$$\lambda x^{*2} + C^* = 0,$$

其中

$$x^* = x' + \frac{B'_1}{\lambda}, \quad C^* = C' - \frac{B_1'^2}{\lambda}.$$

这时, 当 I_1 与 C^* 异号时, 二次曲面为两个平行平面; 当 I_1 与 C^* 同号时, 二次曲面为空集; 当 $C^* = 0$ 时, 二次曲面为平面 $x^* = 0$. 如果 B'_2 和 B'_3 不全为零, 可设 $(B'_2, B'_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, 其中 $r = \sqrt{B_2'^2 + B_3'^2}$. 作坐标变换

$$x^* = x' + \frac{B'_1}{\lambda}, \quad y^* = (\cos \theta y' + \sin \theta y' + \frac{C'}{2r} - \frac{B_1'^2}{2r\lambda}), \quad z^* = -\sin \theta y' + \cos \theta z',$$

则方程 (4.2.12) 变成

$$\lambda x^{*2} + 2ry^* = 0.$$

这时一个抛物柱面.

综上所述, 我们得到二次曲面的分类定理:

定理 4.2 由二次方程

$$\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz \\ &+ 2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0 \end{aligned}$$

定义的二次曲面只可能是以下的图形: 椭球面, 单叶双曲面, 双叶双曲面, 椭圆抛物面, 双曲抛物面, 椭圆锥面, 椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面, 两个相交平面, 两个平行平面, 一条直线, 一个点, 空集.

定理 4.3 设 S 是二次方程

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz \\ + 2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0$$

定义的二次曲面, I_1, I_2, I_3 和 I_4 是它的代数不变量. 则 3 次方程 $t^3 - I_1t^2 + I_2t - I_3 = 0$ 的三个根 λ, μ, ν 均为实数, 并且

- (1) S 为椭球面当且仅当 λ, μ, ν 非零同号, 且 $I_4 < 0$;
- (2) S 为单叶双曲面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号, 且 $I_4 > 0$;
- (3) S 为双叶双曲面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号, 且 $I_4 < 0$;
- (4) S 为椭圆抛物面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零, 且 $I_2 > 0, I_4 < 0$;
- (5) S 为双曲抛物面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零, 且 $I_2 < 0, I_4 > 0$;
- (6) S 为椭圆锥面当且仅当 λ, μ, ν 非零不同号, 且 $I_4 = 0$;
- (7) S 为椭圆柱面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零, 且 $I_2 > 0, I_4 = 0$;
- (8) S 为双曲柱面当且仅当 λ, μ, ν 恰有一个为零, 且 $I_2 < 0, I_4 = 0$;

我们已经由例子 4.5 知道, 椭球面是球面在某个仿射变换下的像. 以下我们证明, 球面在任意一个仿射变换下的像为椭球.

设 S^2 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ϕ 是任意一个仿射变换. 则由第二章的定理 3.2 知, ϕ 有坐标表示 $X^* = BX + \mathbf{b}$, 其中 B 的行列式非零, $\mathbf{b}$ 为常向量, 而 ϕ 将坐标为 X 的点变成坐标为 X^* 的点. 令 $C = B^{-1}$, $\mathbf{c} = -B^{-1}\mathbf{b}$, 则有 $X = CX^* + \mathbf{c}$. 我们将这个方程写成

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这时, 对任何 $X \in S^2$ 有

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = (X^t, 1) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ = (X^{*t}, 1) \begin{pmatrix} C^t & 0 \\ \mathbf{c}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $X^* \in \phi(S^2)$ 满足上述二次方程, 所以 $\phi(S^2)$ 是一个二次曲面. 由上式可见, 它的主矩阵 $A = C^t C$, 并且代数不变量

$$I_4 = \begin{vmatrix} C^t & 0 \\ \mathbf{c}^t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|C|^2 < 0.$$

由于 $A = C^t C$ 为对称矩阵, 由命题 4.1 得知, 存在正交矩阵 T , 使得

$$T^t A T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

故对任何非零 $X = (x, y, z)^t$ 有

$$\begin{aligned} \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 &= (x, y, z) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= X^t T^t A T X = (C T X)^t (C T X) = |C T X|^2 > 0. \end{aligned}$$

故 λ, μ, ν 均为正数. 于是, 定理 4.3 的 (1) 推出, $\phi(S^2)$ 是一个椭球面. 这样, 我们证明了

定理 4.4 球面在仿射变换下的像为椭球面.

习题 III-4

1.

第四章 Lorentz 几何初步

§1 Lorentz 空间

我们在空间 $\mathbb{E}^3$ 中取定一个右手系的单位直角坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 则空间中的每一点 P 便与它的坐标 (x, y, z) 建立了一一对应. 我们将空间中的向量在标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下进行分解, 则每个向量 $\mathbf{v}$ 均唯一对应它的坐标 (v_1, v_2, v_3) . 为了简便起见, 我们记 $P = (x, y, z)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

定义 1.1 设 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 和 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 为空间中的两个向量. 我们定义它们之间的 Lorentz 内积为

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3.$$

特别地, 我们有 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ 和 $e_3 = (0, 0, 1)$, 且

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1, \quad \langle e_3, e_3 \rangle = -1.$$

我们称 e_3 为时间向量, 并称装备有 Lorentz 内积 $\langle, \rangle$ 的空间 $\mathbb{E}^3$ 为 Lorentz 空间, 记为 $(\mathbb{E}^3, \langle, \rangle)$.

命题 1.1 Lorentz 内积 $\langle, \rangle$ 具有以下性质:

(1) 对称性: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$;

(2) 双线性性: 对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 有

$$\langle \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle;$$

(3) 非退化性: 任给 $\mathbf{v} \neq 0$, 存在 $\mathbf{w}$ 使得 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$.

证明 对称性和双线性性由 Lorentz 内积的定义直接得到. 以下证明非退化性. 任给 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$, 则 v_1, v_2 和 v_3 中至少有一个是非零的. 不妨设 $v_1 \neq 0$, 我们只需取 $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$, 便有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$. $\square$

定义 1.2 设 $\mathbf{v}$ 是一个非零向量. 如果 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$, 我们称 $\mathbf{v}$ 为类时向量; 如果 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$, 我们称 $\mathbf{v}$ 为类空向量; 如果 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 我们称 $\mathbf{v}$ 为类光向量.

例如, 时间向量 e_3 即为类时向量; e_1 和 e_2 为类空向量; 而 $\mathbf{v} = e_1 + e_3$ 为类光向量.

设 C 是空间中所有类光向量构成的集合. 我们选定原点 O 作为类光向量的共同起点, 则任何 $\mathbf{v} \in C$ 均可唯一表成 $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. 设 P 的坐标为 (x, y, z) . 因为 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = x^2 + y^2 - z^2$, 所以 $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ 为类光向量当且仅当 P 落在锥面

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (1.1)$$

上. 我们称 C 为光锥, 并将它等同于由方程 (1.1) 给出的中心角为 $\pi/4$ 的锥面.

光锥 C 将空间分割成锥内、锥外两个部分. 空间中一点 $P = (x, y, z)$ 落在光锥内部当且仅当 $x^2 + y^2 - z^2 < 0$; 落在光锥外部当且仅当 $x^2 + y^2 - z^2 > 0$. 于是, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ 为类时向量当且仅当 P 落在光锥内部 (参见图 1-1a); $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ 为类光向量当且仅当 P 落在光锥上 (参见图 1-1b); $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ 为类空向量当且仅当 P 落在光锥外部 (参见图 1-1c).

图 1.1a

图 1.1b

图 1.1c

命题 1.2 设 v 是一个类时向量. 则对任何向量 w 有不等式

$$\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq \langle v, w \rangle^2,$$

且等式成立当且仅当 w 平行于 v .

证明 设 v 和 w 有共同的起点 O , 且 $v = \overrightarrow{OP}$ 为类时向量. 设 Σ 是 v 和 w 张成的平面. 由于 P 落在光锥 C 的内部, 所有平面 Σ 与光锥交于两条不同的直线 l_1 和 l_2 . 记 v_1 和 v_2 分别是直线 l_1 和 l_2 的方向向量, 则有 $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 0$. 因为 $\{v, v_1\}$ 和 $\{v, v_2\}$ 均为平面 Σ 上一组线性无关的向量, 故存在两组实数 $\{s_1, t_1\}$ 和 $\{s_2, t_2\}$, 使得

$$w = s_1 v_1 + t_1 v = s_2 v_2 + t_2 v.$$

由于 v_1 和 v_2 为类光向量, 故 t_1 和 t_2 满足二次方程

$$\langle v, v \rangle t^2 - 2 \langle v, w \rangle t + \langle w, w \rangle = \langle w - tv, w - tv \rangle = 0.$$

当 w 与 v 不平行时, 必有 $t_1 \neq t_2$, 这时上述二次方程有两个不同的根, 故有判别式

$$\Delta = 4(\langle v, w \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle) > 0.$$

而当 w 与 v 平行时, 自然有等式 $\langle v, w \rangle^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$. $\square$

设 $\mathbf{a}$ 为非零向量. 我们定义

$$N_{\mathbf{a}} = \{v \in \mathbb{V} \mid \langle v, \mathbf{a} \rangle = 0\}. \quad (1.2)$$

记 $\hat{a} = \mathbf{a} - 2(\mathbf{a} \cdot \gamma)\gamma$, 则有 $\langle v, \mathbf{a} \rangle = v \cdot \hat{a}$, 故 $N_{\mathbf{a}}$ 恰是过原点 O 且以 $\hat{a}$ 为法向量的平面.

图 1.2a

图 1.2b

图 1.2c

如果 $\mathbf{a}$ 为类时向量时, 则 $N_{\mathbf{a}}$ 中的任何非零向量均不与 $\mathbf{a}$ 平行. 这时由命题 1.2 得到

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle v, v \rangle - \langle \mathbf{a}, v \rangle^2 = 0.$$

由此得到 $\langle v, v \rangle > 0$, 故 $N_{\mathbf{a}}$ 上的所有向量为类空向量. 这时平面 $N_{\mathbf{a}}$ 与光锥 C 仅交于 O 点 (参见图 1.2a).

如果 $\mathbf{a}$ 为类光向量, 则 $\mathbf{a}$ 落在平面 $N_{\mathbf{a}}$ 上. 记 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$. 过 P 并以时间向量 γ 为法向量作一平面 Σ , 它与光锥交于一个圆周 Γ . 设 v 为该圆周在平面 Σ 上 P 处的单位切向量. 因为 v 与向量 $\mathbf{a}, \gamma$ 同时垂直, 所以有

$$\langle \mathbf{a}, v \rangle = \mathbf{a} \cdot v - 2(\mathbf{a} \cdot \gamma)(v \cdot \gamma) = 0.$$

于是, $N_{\mathbf{a}}$ 由向量 $\mathbf{a}$ 和 v 生成, 即 $N_{\mathbf{a}}$ 为与光锥沿向量 $\mathbf{a}$ 相切的平面 (参见图 1.2b).

如果 $\mathbf{a}$ 为类空向量, 则有向量分解 $\mathbb{V} = N_{\mathbf{a}} \oplus \mathbb{R}\mathbf{a}$. 这时有 $\gamma = \gamma' + \lambda\mathbf{a}$, 其中 $\gamma' \in N_{\mathbf{a}}$. 由等式

$$-1 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \gamma' + \lambda\mathbf{a}, \gamma' + \lambda\mathbf{a} \rangle = \langle \gamma', \gamma' \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$$

知, γ' 是一个类时向量. 于是, 平面 $N_{\mathbf{a}}$ 含有一个类时向量, 它必与光锥 C 相交于两条直线 (参见图 1.2c).

反之, 给定空间中的一个平面 Σ . 则存在非零向量 $\hat{\mathbf{a}}$, 使得对任何 Σ 上的向量 v 有 $\hat{\mathbf{a}} \cdot v = 0$. 令 $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - 2(\hat{\mathbf{a}} \cdot \gamma)\gamma$, 则有 $\mathbf{a} \cdot \gamma = -\hat{\mathbf{a}} \cdot \gamma$ 和 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - 2(\mathbf{a} \cdot \gamma)\gamma$. 故 $\mathbf{a}$ 为非零向量, 且有

$$\langle \mathbf{a}, v \rangle = \hat{\mathbf{a}} \cdot v = 0.$$

于是有 $\Sigma = N_{\mathbf{a}}$. 显然, 这样的向量 $\mathbf{a}$ (除一个非零因子外) 被平面 Σ 所唯一确定. 当 $\mathbf{a}$ 分别为类时, 类空和类光向量时, 我们称 Σ 分别为正定, 不定和退化平面.

设 C 为一个光锥. 我们将平面 Σ 平移到 C 的顶点. 当 Σ 与 C 仅交于顶点时, Σ 是正定的平面; 当 Σ 与 C 交于两条直线时, Σ 是不定的平面; 当 Σ 与 C 相切时, Σ 是退化的平面.

另一个更为简单的描述是: Σ 是正定, 不定或退化平面当且仅当 Σ 与时间向量 γ 的夹角大于 $\pi/4$, 小于 $\pi/4$ 或等于 $\pi/4$.

§2 Lorentz 变换

2.1 Lorentz 标架

设 $(\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个 Lorentz 空间. 如果向量组 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 满足

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1, \quad \langle e_3, e_3 \rangle = -1; \quad (2.1.1)$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0, \quad (2.1.2)$$

我们就称 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为一个 Lorentz 标架.

如果我们规定向量矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{w} \rangle \end{pmatrix},$$

则 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 Lorentz 标架当且仅当

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_1. \quad (2.1.3)$$

设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 Lorentz 标架. 则空间中的任意一个标架 $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ 可唯一写成

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad (2.1.4)$$

其中 A 为一个 3 阶矩阵. 由 (2.1.3) 和 (2.1.4) 知,

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} (e'_1, e'_2, e'_3) = A^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (e_1, e_2, e_3)A = A^t I_1 A.$$

故 $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ 是 Lorentz 标架当且仅当矩阵 A 满足方程

$$A^t I_1 A = I_1. \quad (2.1.5)$$

我们称满足方程 (2.1.5) 的矩阵为 Lorentz 矩阵.

设 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 是空间中的一个向量, 它在 Lorentz 标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 下的坐标分别为 (v_1, v_2, v_3) 和 (w_1, w_2, w_3) . 则有

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3. \quad (2.1.3)$$

第五章 射影几何初步

如果我们将空中对地球（设想为平面）进行拍摄，则在不同的点所拍摄的照片并不相同。问：两张照片的对应点所构成的映射是什么映射？

局部上看，它将直线变成直线，其实它不是仿射映射！它是比仿射映射更广的一类映射，称为射影映射。仿射映射被三个不共线的三点及其对应点所唯一决定，而射影映射是被四个一般位置的点及其对应点所唯一决定。这个性质可以用于地图的拼接。

§1 射影平面

设 Σ 和 Σ' 是空间中的两张不同的平面， O 是平面外一个点光源。从 O 点出发的每条光线将一张平面上的点投射到另一张平面上，我们称它为以 O 为中心的投影。

如果 Σ 和 Σ' 平行, 则上述中心投影 $O: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 建立了两个平面间的 1-1 对应. 容易看出, 映射 $O: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 将直线映成直线, 它是从 Σ 到 Σ' 的一个仿射映射.

如果 Σ 和 Σ' 不平行 (参见图 1.1), 这时大部分光线依然将 Σ 上的点投射到 Σ' 上, 并将 Σ 上的直线映成 Σ' 上的直线, 但这时有例外事情发生. 如果我们过 O 点作 Σ' 的平行平面交 Σ 于直线 l , 过 O 点作 Σ 的平行平面交 Σ' 于直线 l' , 则发现 l 上的点没有被投射到平面 Σ' 上, 而且 l' 上的点在平面 Σ 上没有投射点.

通过进一步的观察, 我们发现, 所有平面 Σ 上过直线 l 上一点 P 的直线被映成平面 Σ' 上的平行线, 而平面 Σ 上的一组平行线被投射成平面 Σ' 上的一组直线, 它们相交于直线 l' 上的一点 P' (参见图 1.2).

定理 1.1 (Desarques) 如果两个三角形的对应顶点连线交于一点, 则它们对应边的交点共线。

为了证明 Desarques 定理, 我们应用一个射影变换 ϕ , 它将图 1.3 中的直线 EF 映成无穷远直线 ℓ_∞ . 这时上述图形变成以下图形

我们用 P' 代表点 P 在 ϕ 下的像点. 因为 $E', F' \in \ell_\infty$, 即 $B'_1C'_1$ 平行于 $B'_2C'_2$, $A'_1C'_1$ 平行于 $A'_2C'_2$, 所以有

$$\frac{d(O', A'_1)}{d(O', A'_2)} = \frac{d(O', C'_1)}{d(O', C'_2)} = \frac{d(O', B'_1)}{d(O', B'_2)}.$$

故 $A'_1B'_1$ 也平行于 $A'_2B'_2$, 即 $D' \in \ell_\infty$. 于是 D', E', F' 落在无穷远直线 ℓ_∞ 上, 由此推出 D, E, F 落在直线 $EF = \phi^{-1}(\ell_\infty)$ 上. 定理证毕.

定理 1.2 (Pappus 定理) 设 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2 为共线的两组点. 设 A_1B_2 和 A_2B_1 的交点为 M , A_1C_2 和 A_2C_1 的交点为 N , B_1C_2 和 B_2C_1 的交点为 P , 则 M, N, P 三点共线.

通过中心投影, 问题可化为: 如果 A_1B_2 与 A_2B_1 平行, 且 A_1C_2 与 A_2C_1 平行, 则必有 B_1C_2 与 B_2C_1 平行.

为了使得中心投射成为平面间的 1-1 对应, 我们需要在每张平面上增加一些“无穷远点”, 使之成为“射影平面”。具体的做法如下:

- (i) 在平面 Σ 每个直线方向 $[\mathbf{a}(l)]$ 上增加一个无穷远点 $\infty(l)$;
- (ii) 如果 l 与 l' 平行, 则有 $\infty(l) = \infty(l')$, 即平行的直线有相同的无穷远点;
- (iii) 如果 l 与 l' 不平行, 则有 $\infty(l) \neq \infty(l')$, 即不平行的直线有不同的无穷远点.

定义 1.1 记所有无穷远点构成的集合为 l_∞ . 我们称集合 $P(\Sigma) = \Sigma \cup l_\infty$ 为射影平面, 称 l_∞ 为无穷远直线.

根据以上的定义, 我们得到以下的

命题 1.1

- (i) 射影平面上任何两点确定唯一一条直线;
- (ii) 射影平面的任何两条不同直线有唯一的交点;
- (iii) 中心投影是 $P(\Sigma)$ 到 $P(\Sigma')$ 的 1-1 对应, 它将 $P(\Sigma)$ 中的直线映成 $P(\Sigma')$ 中的直线.

射影平面的几何实现:

§2 射影变换

定义 2.1 设 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 为射影平面间的一个 1-1 对应. 如果 ϕ 将 $P(\Sigma)$ 中的直线映成 $P(\Sigma')$ 中的直线, 则称 ϕ 是一个射影映射. 特别当 $\Sigma = \Sigma'$ 时, 我们称射影映射为射影变换.

设 Σ 和 Σ' 是空间中两张不同的平面, 则平面外一点 O 的中心投影 $O: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是一个射影映射.

命题 2.1 设 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 为射影映射, 则 $\phi^{-1}: P(\Sigma') \rightarrow P(\Sigma)$ 也是射影映射.

证明 如果存在 $P(\Sigma')$ 某条直线 l' 上的三点 $\{P', Q', R'\}$, 使得 $P = \phi^{-1}(P')$, $Q = \phi^{-1}(Q')$ 和 $R = \phi^{-1}(R')$ 在 $P(\Sigma)$ 上不共线. 则 $\{P, Q, R\}$ 中必有一个非无穷远点. 不妨设此点为 P 点. 则直线 PQ 和 PR 是两条不同的直线, 交点为 P . 因为 ϕ 为射影映射, 它将直线映成直线, 所以 $\phi(PQ) = l'$ 和 $\phi(PR) = l'$. 设 X 是 $P(\Sigma)$ 上的任意点. 过 X 可引直线 l 交直线 PQ 于 Y , 交 PR 于 Z ($Y \neq P, Z \neq P$). 这时有

$\phi(l) = \phi(YZ) = l'$. 于是推出 $\phi(X) \in l'$, 即 $\phi(P(\Sigma)) \subset l'$, 这与 ϕ 为 1-1 对应相矛盾. 故 ϕ^{-1} 一定将直线映成直线. $\square$

推论 2.1 射影平面上的所有射影变换构成一个群, 称为射影变换群, 记为 $PGL(3)$.

设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是一个仿射映射. 则 ϕ 将 Σ 上的每条直线 l 映成 Σ' 上的一条直线 l' . 我们规定 $\phi(\infty(l)) = \infty(l')$. 因为仿射变换 ϕ 将与 l 平行的映成与 l' 平行的直线, 所以这个规定是合理的. 于是, 仿射映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 可以唯一地扩充成为一个射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$.

反之, 如果一个射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$, 它将无穷远直线 ℓ_∞ 点映成无穷远直线 ℓ'_∞ . 由于 ϕ^{-1} 也是射影映射, 它将直线 ℓ'_∞ 映成直线 ℓ_∞ . 故 ϕ 将平面 Σ 的点 1-1 对应到 Σ' 内的点, 并将直线映成直线, 为 Σ 到 Σ' 的一个仿射映射. 而射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是由这个仿射映射扩充而成的.

定义 2.2 我们称

$$A_2 = \{\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma) \mid \phi \in PGL(3), \phi(\ell_\infty) = \ell_\infty\}$$

为 $P(\Sigma)$ 上射影变换群的仿射子群.

命题 2.2 设 l 是射影平面 $P(\Sigma)$ 上的一条直线. 则存在射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 它将 l 映成无穷远直线 ℓ_∞ .

证明 取与直线 l 平行且与平面 Σ 相交的平面 Σ' . 在空间中取一点 O 使得它与 l 张成的平面与 Σ' 平行. 其中我们可以使得 l 不落在 Σ' 上, 且 O 点不落在 l 和 Σ 上. 则中心投影 $O: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 将直线 l 映成 $P(\Sigma')$ 上的无穷远直线 ℓ'_∞ . 取定一个仿射变换 $\psi: P(\Sigma') \rightarrow P(\Sigma)$, 它将 ℓ'_∞ 映成 ℓ_∞ . 则射影变换 $\phi = \psi \circ O: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 将直线 l 映成无穷远直线 ℓ_∞ . $\square$

记 $\mathbb{R}P^2$ 为空间中所有过 O 点的直线构成的集合. 因为 $\mathbb{R}P^2$ 中的每条直线交射影平面 $P(\Sigma)$ 于唯一的一点, 其中过 O 点且平行于平面 Σ 的一条直线恰对应到 $P(\Sigma)$ 的一个无穷远点 (图 1.3), 于是射影平面 $P(\Sigma)$ 与 $\mathbb{R}P^2$ 等同起来. 我们记这个 1-1 对应为 $\sigma: P(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}P^2$.

定义 2.3 设 $P(\Sigma)$ 是一个射影平面. 记 $P^*(\Sigma)$ 是 $P(\Sigma)$ 上所有直线构成的集合. 取定平面 Σ 外一点 O , 我们定义 1-1 对应 $P(\Sigma) \rightarrow P^*(\Sigma)$ 如下: 对任何 $A \in P(\Sigma)$, 记过 O 点且垂直于直线 OA 的平面与平面 Σ 截出的直线为 $A^* \in P^*(\Sigma)$. 我们称映射 $A \leftrightarrow A^*$ 为射影平面的一个对偶对应.

命题 2.3 对偶对应将落在直线 A^* 上的点 $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ 对应成交于点 A 的直线 $\{B_1^*, B_2^*, \dots, B_r^*\}$. 特别地, 两点连线变成对应两线的交点.

推论 2.2(Desarques 对偶定理) 如果两个三角形对应边交点共线, 则它们对应顶点的连线交于一点.

推论 2.3(Pappus 对偶定理) 设 l_1, l_2, l_3 和 l'_1, l'_2, l'_3 为两组共点直线. l_1 与 l'_2 的交点和 l'_1 与 l_2 交点的连线为 l''_3 , l_3 与 l'_2 的交点和 l'_3 与 l_2 交点的连线为 l''_1 , l_1 与 l'_3 的交点和 l'_1 与 l_3 交点的连线为 l''_2 , 则 l''_1, l''_2, l''_3 过同一个点.

几何直观 I 给定射影平面 $P(\Sigma)$ 上任意两组处于一般位置的四点 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$ ，存在射影变换 ϕ ，它将 $\{A, B, C, D\}$ 分别对应到 $\{A', B', C', D'\}$.

几何直观 II 射影平面上椭圆、双曲线和抛物线射影等价.

我们记 $GL(3)$ 为所有以 O 为不动点的空间仿射变换构成的变换群. 任何一个 $\Phi \in GL(3)$ 诱导映射 $\Phi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, 并且对任何实数 $\lambda \neq 0$ 有 $\lambda\Phi = \Phi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$

命题 2.4 对任何 $\Phi \in GL(3)$ 来说, $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 是一个射影变换.

命题 2.5 任给一个仿射变换 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 存在唯一仿射变换 $\Phi \in GL(3)$, 使得 $\Phi(\Sigma) = \Sigma$, 并且 $\Phi = \phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$. 于是, 有 $\sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma = \phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$.

命题 2.6 设 l 是射影平面 $P(\Sigma)$ 上的一条直线. 则存在 $\Phi \in GL(3)$, 使得 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 将直线 l 变成无穷远直线 l_∞ .

定理 2.1 任给射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 存在唯一 (除一个非零因子外) 一个 $\Phi \in GL(3)$, 使得 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi \circ \sigma$.

证明 设 $\phi(l_\infty) = l$. 取 $\Psi \in GL(3)$ 使得 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma(l) = l_\infty$. 于是, 有 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma \circ \phi$ 将无穷远直线变成无穷远直线. 于是, 存在 $\Phi \in GL(3)$ 使得 $\sigma^{-1} \circ \Psi_1 \circ \sigma \circ \phi = \sigma^{-1} \circ \Psi_2 \circ \sigma$. 故 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Psi_1^{-1} \Psi_2 \circ \sigma$.

定义 2.4 如果射影平面上四点中任意三点不共线, 我们称它们是处于一般位置上.

定理 2.2 任给射影平面上处于一般位置上的两组点 $\{A, B, C, D\}$, 存在唯一一个射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$, $\phi(D) = D'$.

§3 交比

定义 3.1 设 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 是 $\mathbb{R}P^2$ 中共线的四个不同点 (即空间中过 O 点且共面的四直线). 分别取这些直线的方向向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, 则这些共面向量中的任何两个向量均线性无关. 我们记

$$\mathbf{a}_3 = s_1 \mathbf{a}_1 + t_1 \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_4 = s_2 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2,$$

并定义 $\mathbb{R}P^2$ 中共线四点 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 的交比为

$$(l_1 l_2; l_3 l_4) = \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2}.$$

命题 3.1 交比 $(l_1 l_2; l_3 l_4)$ 的定义与直线方向向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ 的选取无关.

证明 设 $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3, \mathbf{a}'_4\}$ 分别是 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 另一组直线方向向量, 且

$$\mathbf{a}'_3 = s'_1 \mathbf{a}'_1 + t'_1 \mathbf{a}'_2, \quad \mathbf{a}'_4 = s'_2 \mathbf{a}'_1 + t'_2 \mathbf{a}'_2.$$

则存在非零实数 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, 使得

$$\mathbf{a}'_1 = k_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}'_2 = k_2 \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}'_3 = k_3 \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}'_4 = k_4 \mathbf{a}_4.$$

代入上式, 我们得到

$$s_1 = \frac{k_1}{k_3} s'_1, \quad t_1 = \frac{k_2}{k_3} t'_1, \quad s_2 = \frac{k_1}{k_4} s'_2, \quad t_2 = \frac{k_2}{k_4} t'_2.$$

故有

$$\frac{s_2 t_1}{s_1 t_2} = \frac{s'_2 t'_1}{s'_1 t'_2}. \quad \square$$

设上述共面四直线 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 交射影平面 $P(\Sigma)$ 于共线的四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. 则有

$$l_1 = [\overrightarrow{OA_1}], \quad l_2 = [\overrightarrow{OA_2}], \quad l_3 = [\overrightarrow{OA_3}], \quad l_4 = [\overrightarrow{OA_4}].$$

令

$$\overrightarrow{OA_3} = s_1 \overrightarrow{OA_1} + t_1 \overrightarrow{OA_2}, \quad \overrightarrow{OA_4} = s_2 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2}.$$

则容易得到

$$\frac{t_1}{s_1} = (A_1, A_2; A_3), \quad \frac{t_2}{s_2} = (A_1, A_2; A_4).$$

于是, 有

$$(l_1 l_2; l_3 l_4) = \frac{s_2 t_1}{s_1 t_2} = \frac{(A_1, A_2; A_3)}{(A_1, A_2; A_4)}.$$

定义 1.6 射影平面 $P(\Sigma)$ 上共线四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 的交比定义为

$$(A_1 A_2; A_3 A_4) = \frac{(A_1, A_2; A_3)}{(A_1, A_2; A_4)} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_2 A_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_2 A_4}}{\overrightarrow{A_1 A_4}}.$$

于是, 我们有 $(l_1 l_2; l_3 l_4) = (A_1 A_2; A_3 A_4)$.

命题 3.2 $\mathbb{R}P^2$ 中共面四线 ($P(\Sigma)$ 中共线四点) 交比的交比是在射影变换下不变量.

命题 3.3 交比不变:

命题 3.4 设 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 是射影平面上共线的四点, 则有

$$(i) (A_2 A_1; A_3 A_4) = (A_1 A_2; A_4 A_3) = (A_1 A_2; A_3 A_4)^{-1};$$

$$(ii) (A_1 A_3; A_2 A_4) = 1 - (A_1 A_2; A_3 A_4);$$

$$(iii) (A_3 A_4; A_1 A_2) = (A_1 A_2; A_3 A_4).$$

于是, 如果设 $(A_1 A_2; A_3 A_4) = c$, 则对 24 种不同的四点组合 $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$, 交比 $(A_i A_j; A_k A_l)$ 可取六种不同的值:

$$\{c, 1 - c, \frac{1}{c}, 1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{1 - c}, \frac{c}{c - 1}\}.$$

命题 3.5 任给两组共线的三点 $\{A, B, C\}$ 和 $\{A', B', C'\}$, 存在射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$ 和 $\phi(C) = C'$.

命题 3.6 给定两组共线的四点 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$, 存在射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 使得 $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$ 和 $\phi(D) = D'$ 的充要条件是 $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

§4 圆锥曲线的射影理论

命题 4.1 任意两个圆锥曲线均射影等价。

命题 4.2 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ 的交比

$$(l_1 l_2; l_3 l_4) = \frac{\sin \theta_{13} \sin \theta_{24}}{\sin \theta_{23} \sin \theta_{14}},$$

其中 θ_{ij} 为 l_i 旋转到 l_j 的夹角，逆时针为正，顺时针为负。

定理 4.1(Steiner) 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是圆锥曲线 Γ 上不同的四个点. 则对任何点 $P \in \Gamma$ 有 $(PA_1, PA_2; PA_3, PA_4) = c$, 其中 c 为常数. (当 P 与 A_i 重合时, 令 PA_i 为 A_i 点的切线.)

定理 4.2(Pascal) 圆锥曲线的任意内接六边形的三对对边交点共线。

命题 4.3 如果圆锥曲线 Γ 内部一点 P , 存在射影变换 ϕ , 使得 $\phi(\Gamma) = \Gamma'$ 为一个圆, 并且 $P' = \phi(P)$ 为圆 Γ' 的中心.

命题 4.4 任给圆锥曲线 Γ 上的两点 Q_1, Q_2 , 以及 Γ 内部的一点 P , 存在以 P 为不动点的射影变换 ϕ , 使得 $\phi(\Gamma) = \Gamma$, 并且 $\phi(Q_1) = Q_2$.

定义 4.1 设 Γ 是一条圆锥曲线. 如果两点 $P, Q \in P(\Sigma)$ 使得 PQ 连线交 Γ 于 A_1, A_2 , 并且 $(A_1 A_2; PQ) = -1$, 我们称 P, Q 为关于 Γ 的一个调和共轭.

命题 4.5 如果 P 落在 Γ 的内部, 则所有与 P 调和共轭的点 Q 构成 Γ 外部的一条直线 $\ell(P)$ (称为 P 点的极线).

命题 4.6 如果 P 落在 Γ 的外部, 过 P 作 Γ 的切线, 切点为 Q_1 和 Q_2 . 则所有与 P 调和共轭的点 Q 构成 Γ 内部的弦 Q_1Q_2 .

命题 4.7 圆锥曲线的焦点 F 的极线是它所对应的准线.

定义 4.2 如果 $P \in \Gamma$, 我们定义它所对应的极线 $\ell(P)$ 为 P 点处的切线.

定义 4.3 我们称 $P(\Sigma)$ 上由 $P \rightarrow \ell(P)$ 定义的点线对偶为关于圆锥曲线 Γ 的配极映射.

命题 4.5 配极映射将两点连线变成两线交点.

定理 4.3(Brianchon) 圆锥曲线的任一外切六边形的三对对顶点的连线共点.

§5 射影坐标系

定义 5.1 设 $\mathbb{R}P^2$ 是过 O 点的所有直线构成的射影平面. 我们取 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. 令 $\mathbb{V}$ 是所有以 O 点为起点的向量构成的向量空间. 则任何一个非零向量 $\mathbf{a}$ 有坐标 (a_1, a_2, a_3) . 对任何实数 $\lambda \neq 0$, 向量 $\lambda\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}$ 决定唯一的过 O 点的直线. 我们记向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 所决定的直线 l 为 $[(a_1, a_2, a_3)] \in \mathbb{R}P^2$. 则有

$$[\lambda(a_1, a_2, a_3)] = [(a_1, a_2, a_3)].$$

我们称 $[(a_1, a_2, a_3)]$ 为 $l \in \mathbb{R}P^2$ 的齐次坐标.

于是, 有

$$\mathbb{R}P^2 = \{[(x, y, z)] \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中过点 $A = [(a_1, a_2, a_3)]$ 和 $B = [(b_1, b_2, b_3)]$ 的射影直线 l 可以表成

$$l = \{[\lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3)] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

所有向量 $(x, y, z) = \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3)$ 落在一张过 O 点的平面上, 它的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

或写成

$$ax + by + cz = 0,$$

其中

$$a = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是, $\mathbb{R}P^2$ 中的一条射影直线可以表成

$$l = \{[(x, y, z)] \mid ax + by + cz = 0\}.$$

我们记射影直线 l 的齐性坐标为 $[(a, b, c)]$.

命题 5.1 设 $P = [(x, y, z)]$ 是射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中的一个点, 而射影直线 l 的齐性坐标为 $[(a, b, c)]$. 则 P 落在 l 上当且仅当 $ax + by + cz = 0$.

命题 5.2 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中三点 $A = [(a_1, a_2, a_3)]$, $B = [(b_1, b_2, b_3)]$ 和 $C = [(c_1, c_2, c_3)]$ 三点共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

命题 5.3 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 中三射影直线 $a_1x + a_2y + a_3z = 0$, $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ 和 $c_1x + c_2y + c_3z = 0$ 交于一点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

命题 5.4 $\mathbb{R}P^2 = \Sigma_1 \cup l_\infty$, 其中

$$\Sigma_1 = \{[(x, y, z)] \mid z \neq 0\} = \{(\hat{x}, \hat{y}, 1) \mid (\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2\}$$

为过 e_3 终点且平行于 $\{e_1, e_2\}$ 的平面, 而

$$l_\infty = \{[(x, y, 0)] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}.$$

命题 5.5 任何射影变换 $\Phi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ 有坐标表示

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

命题 5.6 Σ_1 上的任何仿射变换 $\Phi: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ 有坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

命题 5.7 任给射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 上处于一般位置上的四点 $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$, 存在 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 使得

$$l_1 = [(1, 0, 0)], \quad l_2 = [(0, 1, 0)], \quad l_3 = [(0, 0, 1)], \quad l_4 = [(1, 1, 1)].$$

命题 5.8 设 Σ 为 $\mathbb{E}^3$ 中的一张平面, O 为平面 Σ 外一点. 则任给射影平面 $P(\Sigma)$ 上处于一般位置上的四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, 存在 $\mathbb{E}^3$ 中的仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 使得

$$A_1 = [(1, 0, 0)], \quad A_2 = [(0, 1, 0)], \quad A_3 = [(0, 0, 1)], \quad A_4 = [(1, 1, 1)].$$

例子 用齐次坐标法证明 Desargues 定理. 令

$$A = [(1, 0, 0)], \quad B = [(0, 1, 0)], \quad C = [(0, 0, 1)], \quad P = [(1, 1, 1)].$$

则直线方程

$$AB = \{z = 0\}, \quad BC = \{y = 0\}, \quad AC = \{x = 0\}.$$

由于 $\{A', A, P\}$, $\{B', B, P\}$ 和 $\{C', C, P\}$ 共线, 可设 $A' = [(a, 1, 1)]$, $B' = [(1, b, 1)]$ 和 $A' = [(1, 1, c)]$. 于是 $A'B'$, $B'C'$ 和 $C'A'$ 的方程分别为

$$(1-b)x + (1-a)y + (ab-1)z = 0;$$

$$(bc-1)x + (1-c)y + (1-b)z = 0;$$

$$(1-c)x + (ac-1)y + (1-a)z = 0.$$

可以计算 AB 与 $A'B'$ 的交点 $M = [(a-1, 1-b, 0)]$, BC 与 $B'C'$ 的交点 $N = [(0, b-1, 1-c)]$, AC 与 $A'C'$ 的交点 $D = [(1-a, 0, c-1)]$. 由于

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1-b & 0 \\ 0 & b-1 & 1-c \\ 1-a & 0 & c-1 \end{vmatrix} = 0,$$

定理得证.

记 $\mathbb{R}P^2 = \Sigma_1 \cup l_\infty$. 则平面 Σ_1 上的直线

$$a\hat{x} + b\hat{y} + c = 0$$

在齐次坐标系下的方程为

$$ax + by + cz = 0;$$

平面 Σ_1 上的二次曲线

$$a_{11}\hat{x}^2 + 2a_{12}\hat{x}\hat{y} + a_{22}\hat{y}^2 + 2a_{13}\hat{x} + 2a_{23}\hat{y} + a_{33} = 0$$

在齐次坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

记

$$X = (x, y, z), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbb{R}P^2$ 中的二次曲线 Γ 可表成

$$\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0.\}.$$

特别是, Σ_1 中的椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Σ_1 中的双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Σ_1 中的双曲线 $x^2 - 2cy = 0$ 对应

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 5.1 射影平面上处于一般位置上的五点可唯一确定通过它们的一个圆锥曲线.

证明 任给射影平面上处于一般位置上的五点 $\{A, B, C, D, E\}$. 我们可以取齐次坐标系, 使得

$$A = [(1, 0, 0)], \quad B = [(0, 1, 0)], \quad C = [(0, 0, 1)], \quad D = [(1, 1, 1)], \quad E = [(\lambda, \mu, \nu)].$$

代入二次曲线方程, 得到

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0, \quad \lambda a_{12} + \mu a_{13} + \nu a_{23} = 0.$$

因为 $D \neq E$, 得到

$$a_{12} : a_{13} : a_{23} = (\mu - \nu) : (\nu - \lambda) : (\lambda - \mu).$$

所以过 $\{A, B, C, D, E\}$ 的圆锥曲线 Γ 唯一存在, 为

$$(\mu - \nu)xy + (\nu - \lambda)xz + (\lambda - \mu)yz = 0.$$

定理证毕.

设 Γ 是 $\mathbb{RP}^2$ 中的一条圆锥曲线. 我们在 $\mathbb{E}^3$ 中取定仿射坐标系 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 则圆锥曲线 Γ 的齐次方程可写成

$$\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0\},$$

其中 $X = (x, y, z)$, $[X]$ 表示向量 $\mathbf{u} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ 所定义的直线, 而 A 是一个对称的 3×3 矩阵, 它的特征值非负.

定理 5.2 设 $\Gamma = \{[X] \mid X'AX = 0\}$ 为 $\mathbb{RP}^2$ 中的圆锥曲线, $P = [V]$ 和 $Q = [W]$ 是 Γ 外的两点, 它们的连线交 Γ 于两点 A_1, A_2 . 则 P, Q 关于 Γ 调和共轭当且仅当 $V'AW = 0$.

证明 我们记

$$A_1 = [t_1V + W], \quad A_2 = [t_2V + W].$$

由于 A_1, A_2 在 Γ 上, 则 t_1, t_2 满足方程 $(tV + W)'A(tV + W) = 0$, 即

$$(V'AV)t^2 + 2(V'AW)t + (W'AW) = 0.$$

因为 $(A_1A_2; PQ) = t_2/t_1$, 所以

$$(A_1A_2; PQ) = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow V'AW = 0.$$

第六章 双曲几何初步

§1 Möbius 变换群

定义 1.1 在平面 $\mathbb{E}^2$ 上给定一个圆 σ , 圆心为 O , 半径为 r . 则 σ 诱导一个映射 $\sigma: \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$:

- (i) $\{O, P, \sigma(P)\}$ 共线;
- (ii) $d(O, \sigma(P))d(O, P) = r^2$.

我们记增广平面 $\overline{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$, 并规定 $\sigma(O) = \infty, \sigma(\infty) = O$, 则 $\sigma: \overline{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{E}}^2$ 为增广平面上的一个一一对应, 称为圆 σ 的反演变换.

命题 1.1 设 σ 是平面上一个圆.

- (i) 反演变换 σ 满足 $\sigma^2 = id$, 并保持 σ 上的每个点不动;
- (ii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的直线变成它自身;
- (iii) 反演变换 σ 将每个过圆心 O 的圆周变成不过圆心 O 的直线;
- (iv) 反演变换 σ 将每个不过圆心 O 的直线 l 变成过圆心 O 的圆 σ' , 并且 σ' 在 O 点的切线与 l 平行;
- (v) 反演变换 σ 将每个与 σ 正交的圆变成它自身;
- (vi) 反演变换 σ 将不过圆心 O 的一个圆 σ_1 变成一个圆 σ_2 ;
- (vii) 反演变换 σ 是反定向的变换.

平面上的一条直线 σ 可以看成是半径为无穷大的圆, 它过 ∞ 点. 这时我们规定它的反演变换 $\sigma: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 为关于 σ 的直线反射, 并且 $\sigma(\infty) = \infty$. 它是反定向的变换.

于是, 增广平面上的圆由平面上的圆和直线组成. 增广平面上的每个圆 σ 均对应反演变换 $\sigma: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$.

命题 1.2 反演变换 σ 将圆变成圆, 并保持相交圆的交角不变.

定义 1.2 我们定义增广平面 $\mathbb{E}^2$ 上的 Möbius 群为

$$\mathcal{M}_2 = \{\phi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \cdots \circ \sigma_r : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2\},$$

其中 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ 为圆的反演变换. 我们称 $\mathcal{M}_2$ 中的元素为 Möbius 变换.

命题 1.3 平面上的直线反射、平移和旋转均为特殊的 Möbius 变换, 它们均以 ∞ 为不动点. 于是, 平面上的等距变换群为 Möbius 群的一个子群.

命题 1.4 平面上一个点 O 处的伸缩变换为 Möbius 变换, 它以 O 和 ∞ 为不动点.

定义 1.3 我们在 $\mathbb{E}^2$ 中建立右手的单位直角坐标系 Oxy . 则平面上每个点 (x, y) 对应一个复数 $z = x + iy$. 于是, $(x, -y)$ 对应共轭复数 $\bar{z}$, $(-y, x)$ 对应复数 iz . 我们记

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{E}^2.$$

命题 1.5 平面上的直线可以表成

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

命题 1.6 平面上的中心在 z_0 , 半径为 r 的圆可以表成

$$|z - z_0|^2 = r^2;$$

或可以表成

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0, \quad \alpha = -z_0, \quad c = |z_0|^2 - r^2.$$

命题 1.7

- (i) 平面上的等距变换可以表成 $w = e^{i\theta}z + z_0$, 或 $w = e^{i\theta}\bar{z} + z_0$;
- (ii) 平面上在 z_0 点处的伸缩变换可表成 $w = \lambda z + (1 - \lambda)z_0$, 其中 $\lambda \neq 0$ 为伸缩常数;
- (iii) 平面上关于直线 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0$ 的反射可以表成

$$w = -\frac{1}{\bar{\alpha}}(\alpha\bar{z} + c).$$

- (iv) 设 σ 为中心在 z_0 点, 半径为 r 的圆周. 则反演变换 $\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 可以表成

$$w = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}.$$

定理 1.1

- (i) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的保定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表成分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

- (ii) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的反定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表成共轭分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

定理 1.2

(i) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

或是正伸缩变换和保定向等距变换的复合, 或是一个反演变换和反定向等距变换的复合;

(ii) 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的共轭分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

或是反定向的等距变换, 或是正伸缩变换和直线反射的复合, 或是一个反演变换和保定向等距变换的复合.

证明: 我们先证明 (i). 如果 $\gamma = 0$, 可不妨设 $\delta = 1$. 记 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. 则有

$$\phi(z) = \alpha z + \beta = \phi_1 \circ \phi_2(z),$$

其中 $\phi_1(z) = |\alpha|z$ 为正伸缩, 而 $\phi_2(z) = e^{i\theta}z + \frac{\beta}{|\alpha|}$ 为保定向的等距变换. 如果 $\gamma \neq 0$, 可不妨设 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. 我们令 $z_0 = \phi(\infty) = \alpha/\gamma$, $r = 1/|\gamma|$. 令 σ 是中心在 z_0 , 半径为 r 的圆. 则有

$$\sigma \circ \phi(z) = z_0 + \frac{r^2}{\phi(z) - \bar{z}_0} = -\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\bar{z} + \frac{\alpha - \bar{\delta}}{\gamma},$$

于是, $\sigma \circ \phi = \phi_1$ 是一个反定向的等距变换. 故 $\phi = \sigma \circ \phi_1$ 是一个反演变换和反定向等距变换的复合, 为 Möbius 变换.

以下证明 (ii). 如果 $\gamma = 0$, 可不妨设 $\delta = 1$. 于是 $\phi(z) = \alpha\bar{z} + \beta$. 当 $|\alpha| = 1$ 时, 它是一个反定向的等距变换. 当 $|\alpha| \neq 1$ 时, 记 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, 并令 ϕ_1 为中心在 $z_0 = \beta/(1 - |\alpha|)$, 伸缩常数为 $|\alpha|$ 的伸缩, 而 σ 为直线 $(-ie^{-i\theta/2})z + (ie^{i\theta/2})\bar{z} = 0$ 的反射变换. 则有

$$\phi_1(z) = |\alpha|z + \beta, \quad \sigma(z) = e^{i\theta}\bar{z}.$$

容易验证 $\phi = \phi_1 \circ \sigma$, 为一个正伸缩和一个直线反射的复合. 如果 $\gamma \neq 0$, 可不妨设 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. 我们令 $z_0 = \phi(\infty) = \alpha/\gamma$, $r = 1/|\gamma|$. 令 σ 是中心在 z_0 , 半径为 r 的圆. 则有

$$\sigma \circ \phi(z) = z_0 + \frac{r^2}{\phi(z) - \bar{z}_0} = -\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}z + \frac{\alpha - \bar{\delta}}{\gamma},$$

为保定向的等距变换. 于是, ϕ 是反演变换和保定向等距变换的复合.
□

定理 1.4 增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的所有分式线性变换和共轭分式线性变换构成 Möbius 变换群.

定理 1.5 任意 Möbius 变换可以写成至多四个反演变换的复合.

定义 1.4 以 ∞ 为不动点的 Möbius 变换称为平面上的相似变换. 平面上所有相似变换构成一个群, 称为相似变换群, 它是 Möbius 群的一个子群.

定理 1.6 平面上的相似变换可以表成正伸缩和等距变换的复合.

命题 1.8 设 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 为增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的三个不同点. 则

- (i) 存在唯一一个保定向的 Möbius 变换 ϕ , 使得 $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) = 1, \phi(z_3) = \infty$;
- (ii) 存在唯一一个反保定向的 Möbius 变换 ϕ , 使得 $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) = 1, \phi(z_3) = \infty$.

证明 (i) 和 (ii) 中的 ϕ 分别可以唯一写成

$$\phi(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}; \quad \phi(z) = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_3}.$$

定理 1.7 任给增广平面上两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 存在唯一的保定向 Möbius 变换 ϕ (反定向的 Möbius 变换 ϕ), 使得

$$w_1 = \phi(z_1), \quad w_2 = \phi(z_2), \quad w_3 = \phi(z_3).$$

定义 1.5 在空间 $\mathbb{E}^3$ 上给定一个球面 σ , 球心为 O , 半径为 r . 则 σ 诱导一个映射 $\sigma: \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$, 满足条件

- (i) $\{O, P, \sigma(P)\}$ 共线;
- (ii) $d(O, \sigma(P))d(O, P) = r^2$;
- (iii) 并规定 $\sigma(O) = \infty$ 和 $\sigma(\infty) = O$.

我们记增广空间 $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$, 并称 $\sigma: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为球面 σ 的反演变换.

命题 1.9 设 σ 是空间中的一个球面.

- (i) 反演变换 σ 满足 $\sigma^2 = id$, 并保持球面 σ 上的每个点不动;
- (ii) 反演变换 σ 将每个过球心 O 的直线 (平面) 变成它自身;
- (iii) 反演变换 σ 将每个过球心 O 的球面 (圆周) 变成不过圆心 O 的平面 (直线);
- (iv) 反演变换 σ 将每个不过球心 O 的平面 Σ (直线 l) 变成过圆心 O 的球面 (圆) σ' , 并且 σ' 在 O 点的切平面 (切线) 与 $\Sigma(l)$ 平行;
- (v) 反演变换 σ 将每个与 σ 正交的球面 (圆) 变成它自身;
- (vi) 反演变换 σ 将不过球心 O 的一个球面 (圆) σ_1 变成一个球面 (圆) σ_2 ;
- (vii) 反演变换 σ 是反定向的变换.

定义 1.6 (球极投影) 设 S^2 为空间中一个球面, Σ 是空间中的一张平面. $O \in S^2$ 是球面到平面 Σ 的最远点 (北极点). 对任何 $P \in S^2 \setminus \{O\}$ 存在唯一 $P' \in \Sigma$ 使得 $\{O, P, P'\}$ 共线. 我们称 1-1 对应

$$\sigma : S^2 \rightarrow \Sigma \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{E}^2}, \quad P \rightarrow P', \quad \sigma(O) = \infty$$

为球面 S^2 到平面 Σ 的球极投影.

命题 1.10 存在空间以 O 为中心的一个球面 σ , 使得关于 σ 的空间反演变换 $\sigma : \overline{\mathbb{E}^3} \rightarrow \overline{\mathbb{E}^3}$ 给出球极投影 $\sigma : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{E}^2}$.

命题 1.11 球极投影 $\sigma : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{E}^2}$ 将 S^2 上过 O 点的圆映成直线, 将 S^2 上不过 O 点的圆映成圆, 并保持两圆的交角不变.

§2 复交比

考查实射影直线 $\mathbb{R}P^1$, 它是平面 $\mathbb{E}^2$ 上所有过 O 点的直线构成的集合. 通过在 $\mathbb{E}^2$ 上建立坐标系 Oxy , 则有

$$\mathbb{R}P^1 = \{[(x, y)] \mid x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

射影变换 $\Phi: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ 对应一个 2 阶非退化矩阵 A , 使得

$$\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] = \Phi([(x, y)]) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right].$$

我们设 $\ell_1 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, 并记 $\infty = [(1, 0)]$. 则有

$$\mathbb{R}P^1 = \ell_1 \cup \{\infty\}.$$

在 ℓ_1 上作射影变换 Φ , 我们得到

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \left[\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix} \right],$$

于是, 在实轴上的射影变换可以写成

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}).$$

射影变换的基本不变量为四点的交比

$$(x_1 x_2; x_3 x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

我们将增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 等同于复射影直线 $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 则保定向的 Möbius 变换群便等同于 $\mathbb{C}P^1$ 上的射影变换

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

定义 2.1 设 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 为增广平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上四点, 我们定义它们的复交比为

$$(z_1 z_2; z_3 z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

定理 2.1 设 $\phi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 为 Möbius 变换, $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上四点.

- (i) 如果 ϕ 保定向, 则 $(\phi(z_1)\phi(z_2); \phi(z_3)\phi(z_4)) = (z_1z_2; z_3z_4)$;
- (ii) 如果 ϕ 反定向, 则 $(\phi(z_1)\phi(z_2); \phi(z_3)\phi(z_4)) = \overline{(z_1z_2; z_3z_4)}$.

因为每个圆周均与实轴 Möbius 等价, 故有

定理 2.2 增广平面上 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 四点共圆的充要条件是 $(z_1z_2; z_3z_4)$ 为实数.

§3 双曲几何的 Poincare 模型

定义 3.1 设 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 为平面上的单位圆盘, 它的边界圆 $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$. 我们定义:

- (i) 双曲平面由 D 中的所有点构成;
- (ii) 双曲平面中的双曲直线是与 ∂D 正交的圆周 (或直线) 与 D 的交集组成;

定义 3.2 每个与 ∂D 正交的圆 (或直线) σ 的反演 (反射) 诱导变换 $\sigma: D \rightarrow D$, 称为关于双曲直线 σ 的直线反射. 有限个双曲直线的反射构成的群称为双曲变换群.

命题 3.1 任给非零的 $a \in D$, 存在唯一一个直线反射 σ , 使得 $\sigma(a) = 0$. 这个反演有表达式

$$\sigma(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1} \right).$$

命题 3.2

- (i) 给定两点 $a, b \in D$, 存在唯一过此两点的一条双曲直线;
- (ii) 过双曲直线 l 外一点, 存在无穷多条与 l 不交 (即平行) 的双曲直线.

命题 3.3 任给一条双曲直线 l , 存在一个双曲变换 $\phi: D \rightarrow D$, 使得 $\phi(l)$ 是 D 中的实直线.

定义 3.1 任给双曲平面中两点 $z_1, z_2 \in D$ ，恰有一条过此两点的直线 σ ，它与 ∂D 交于两点 ξ_1, ξ_2 ，其中 ξ_1 与 z_1 相邻， ξ_2 与 z_2 相邻。我们定义 z_1 至 z_2 的双曲距离为

$$d(z_1, z_2) = -\log(z_1 z_2; \xi_1 \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1| |z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1| |z_2 - \xi_2|}.$$

命题 3.4

- (i) $d(z_1, z_2) \geq 0$ ，并且 $d(z_1, z_2) = 0$ 当且仅当 $z_1 = z_2$ ；
- (ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ ；
- (iii) 若 z_2 落在 $\{z_1, z_3\}$ 所决定的双曲线段上，则有

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3)；$$

- (iv) 双曲变换为等距变换。

命题 3.5

- (i) 对任意 $z \in D$ 有

$$d(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}；$$

- (ii) 对任意两点 $a, z \in D$ 有

$$d(a, z) = \log \frac{|\bar{a}z - 1| + |z - a|}{|\bar{a}z - 1| - |z - a|}.$$

定理 3.1 设双曲三角形 ABC 三个角为 A, B 和 C ，它们的对应边长度分别为 a, b 和 c ，则有

- (i) 正弦定理：

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}；$$

- (ii) 余弦定理：

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C；$$

(iii)

$$\cosh c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}.$$

证明 首先我们证明上述余弦定理 I. 通过一个双曲变换, 我们不妨设三角形 ABC 的顶点分别对应复数 $z = \rho e^{iC}$ 实数 $r, 0$ 和. 于是,

$$a = \log \frac{1+r}{1-r}, \quad b = \log \frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad c = \log \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \delta = \frac{|z-r|}{|rz-1|}.$$

由此得到

$$r = \tanh \frac{a}{2}, \quad \rho = \tanh \frac{b}{2}, \quad \delta = \tanh \frac{c}{2};$$
$$\frac{\delta^2}{1-\delta^2} = \frac{|z-r|^2}{(1-r^2)(1-\rho^2)} = \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos C}{(1-r^2)(1-\rho^2)}.$$

故有

$$\cosh c = 2 \frac{\delta^2}{1-\delta^2} + 1 = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C.$$

其次我们利用余弦定理 I 来证明正弦定理. 由于

$$\cos C = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b},$$

我们得到

$$\frac{\sin^2 C}{\sinh^2 c} = \frac{1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c},$$

由对称性推出正弦定理. 最后, 我们令

$$R^2 = 1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c > 0, \quad R > 0,$$

则有

$$\sin A = \frac{R}{\sinh b \sinh c}, \quad \sin B = \frac{R}{\sinh a \sinh c}, \quad \sin C = \frac{R}{\sinh a \sinh b}.$$

于是, 利用余弦定理直接计算, 我们得到

$$\frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B} = \frac{1}{R^2} (\sinh a \sinh b \sinh^2 c) (\cos A \cos B + \cos C) = \cosh c.$$

我们称两个三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 全等, 如果存在双曲变换 $\phi: D \rightarrow D$, 使得

$$A' = \phi(A), \quad B' = \phi(B), \quad C' = \phi(C).$$

定理 3.2 双曲平面中两个三角形全等当且仅当

- (i) 边边边: 它们对应三边的边长相等;
- (ii) 角角角: 它们对应三角的角度相等;
- (iii) 边角边: 它们的两个对应边的边长度及其夹角的角度相等;
- (iii) 角边角: 它们的两个对应夹角的角度及其共同边的边长相等.

命题 3.6 对双曲平面中任意三点 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 有

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \leq d(z_1, z_3);$$

且等式成立当且仅当 z_2 落在 $\{z_1, z_3\}$ 所决定的双曲线段上.

命题 3.7 对任何 $a \in D$ 有

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d(z, a)}{|z - a|} = \frac{2}{1 - |a|^2}.$$

定理 3.3 双曲半径为 r 的双曲圆的周长为 $2\pi \sinh r$.

命题 3.8 任给圆周 ∂D 上的两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 存在至多三个双曲直线反射, 使得它们的复合变换 ϕ 满足

$$\phi(z_1) = w_1, \quad \phi(z_2) = w_2, \quad \phi(z_3) = w_3.$$

定理 3.4 任何一个双曲变换 $\phi: D \rightarrow D$ 可表成

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1$$

或

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}, \quad |a| < 1$$

的形式.

证明 令 $a \in D$ 满足 $\phi(a) = 0$. 令存在唯一的双曲线反射

$$\sigma(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1} \right),$$

使得 $\sigma(0) = a$. 则 $\phi_1 = \phi \circ \sigma$ 是一个双曲变换, 使得 $\phi_1(0) = 0$. 令 $\phi_1(1) = e^{i\varphi}$. 因为 ϕ_1 将双曲线 $(-1, 1)$ 表成 0 和 $e^{i\varphi}$ 所在的双曲线, 故有 $\phi_1(-1) = -e^{i\varphi}$. 由于 $\phi_2(z) = e^{i\varphi}\bar{z}$ 是反定向的 Möbius 变换, 它将 $\{0, 1, -1\}$ 映成 $\{0, e^{i\varphi}, -e^{i\varphi}\}$; 而 $\phi_3(z) = e^{i\varphi}z$ 是保定向的 Möbius 变换, 它将 $\{0, 1, -1\}$ 映成 $\{0, e^{i\varphi}, -e^{i\varphi}\}$; 故 $\phi \circ \sigma = \phi_2$, 或者 $\phi \circ \sigma = \phi_3$. 于是,

$$\phi(z) = \phi_2(\sigma(z)) = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad e^{i\theta} = e^{i\varphi} \frac{\bar{a}}{a};$$

或者

$$\phi(z) = \phi_3(\sigma(z)) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}, \quad e^{i\theta} = e^{i\varphi} \frac{a}{\bar{a}}.$$

命题 3.9 黎曼度量

$$g = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

在双曲变换下保持不变.

定理 3.6 任何两个双曲极限三角形是双曲等价的.

双曲面积的定义需要用到积分, 我们略去不讲. 双曲变换保持任意两点的双曲距离. 于是从直观上说, 我们可以断定: 任意两个双曲极限三角形有相同的面积. 并且, 通过计算, 我们知道: 极限三角形的面积为 π .

命题 3.10 设三角形 ABC , A 为内点, B 和 C 为边界点. 则三角形面积

$$\Delta = \pi - A.$$

定理 3.7 设双曲三角形 ABC 的顶角角度为 A, B, C , 则三角形面积

$$\Delta = \pi - A - B - C.$$

§4 双曲几何的半平面模型

定义 4.1 将双曲几何中的 Poincare 圆盘 D 的中心放在 $z = -1$ 点. 设 σ 是中心在 $z_0 = -2$, 半径为 2 的圆. 则反演变换 $\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 将 D 映成上半平面

$$\mathbb{H} = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

命题 4.1 双曲平面 $\mathbb{H}$ 中的双曲直线是与实轴正交的圆或直线.

命题 4.2 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. 设 ℓ 是过它们的双曲直线.

(i) 如果 ℓ 是与实轴正交的直线, 且 $\operatorname{Im} z_1 > \operatorname{Im} z_2$, 则有

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{z_1}{z_2}.$$

(ii) 如果 ℓ 是与实轴正交于 ξ_1 和 ξ_2 的圆周, 其中 ξ_1 与 z_1 邻近, ξ_2 与 z_2 邻近, 则有

$$d(z_1, z_2) = -\log(z_1 z_2; \xi_1 \xi_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1| |z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1| |z_2 - \xi_2|}.$$

命题 4.3 双曲平面 $\mathbb{H}$ 中的

(i) 保定向双曲变换可写成

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

(ii) 反定向双曲变换可写成

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc < 0.$$

命题 4.4 黎曼度量

$$g = \frac{|dz|^2}{\operatorname{Im} z^2}$$

在双曲变换下保持不变.